Konstruktivni zadaci

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:
1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu slike (skice) rješenja, logičkim razmišljanjem (i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata skici, kao što su tačka, prava i slično), dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku. U analizi ne objašnjavamo kako se šta može konstruisati, nego samo kosultira šta se može konstruisati i na osnovu čega.

U konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenje zadatka.

U dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nismo tamo dokazali. Generalno u dokazu treba da se nalazi rečenica šta se treba dokazati, i dati dokaz toga.

U diskusiji (determinizaciji) razmatramo broj rješenja u odnosu na položaj datih elemenata.

Konstrukcija trougla

1. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

2. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

3. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b - c$.

4. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati visine h_a i h_c, i težišna linija t_a.

5. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

6. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica c, duž $a - b$ i ugao $\alpha - \beta$.

7. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

8. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

9. Konstruisati raznostranični trougao $\triangle ABC$ ako su pozati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a + c$.

10. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena. *Konkurentne prave* su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

11. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

12. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, duž $b + c$ i ugao $\beta - \gamma$.

13. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

14. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Konstrukcija četverougla

15. Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

16. Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

17. Konstruisati kvadrat ako dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Konstrukcija tačke

18. U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglovima.

19. Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

20. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$, gdje je d data duž.

21. Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

Konstrukcija prave

22. Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

23. Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

24. Date su podudarne kružnice k_1 i k_2, i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

25. Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Napomena. *Ugao između prave i kruga* je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.

26. Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

27. Konstruisati pravu koja siječe dvije date kružnice pod datim uglom.

Razni zadaci

28. Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

29. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date stranice a i b, i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

30. Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

31. Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

32. Date su tačke A i B, i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsjeca na njima podudarne tetive.

33. Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

34. Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l. Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B)||l$.

35. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati visina h_c, težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

36. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

37. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

38. Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla.

39. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

40. Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram, tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

41. Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

Zadaci za vježbu

42. Date su tačke A, B, C i duž d. Kroz tačku A konstruisati pravu, tako da zbir rastojanja tačaka B i C od te prave bude jednak duži d.

43. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

44. Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove simetrale uglova leže na datim pravama.

45. U dati kvadrat upisati drugi kvadrat, tako da prava određena jednom stranicom toga kvadrata prolazi kroz datu tačku.

46. Konstruisati kvadrat ako je data po jedna tačka na svakoj od njegovih stranica ili na njihovim produžecima.

47. Date su kružnice k_1 i k_2 i duži d_1 i d_2. Konstruisati pravu koja siječe kružnicu k_1 u tačkama A_1 i B_1 i kružnicu k_2 u tačkama A_2 i B_2, tako da je $A_1B_1 = d_1$ i $A_2B_2 = d_2$.

48. Na datoj kružnici konstruisati tačku, tako za koju je razlika rastojanja dvije date prave jednaka datoj duži.

49. Konstruisati trougao ako je dato:

(a) h_a, $2p$, r;

(p je poluobim trougla, r poluprečnik upisane kružnice)

(b) α, r_a, $b+c-a$;

(c) $2p$, r, r_a;

(r_a je poluprečnik spolja upisane kružnice koja dodiruje stranicu a i prave koje sadrže stranice b i c);

(d) a, r, r_a;

(e) r, r_a, $b-c$;

(f) r_b, r_c, $\beta-\gamma$;

(g) a, r_b, r_c;

(h) r_b, r_c, $b+c$;

(i) c, r, r_c;

(j) c, γ, $\alpha-\beta$;

(k) h_c, t_c, $\alpha-\beta$;

50. Konstruisati trougao ako su dati elementi:

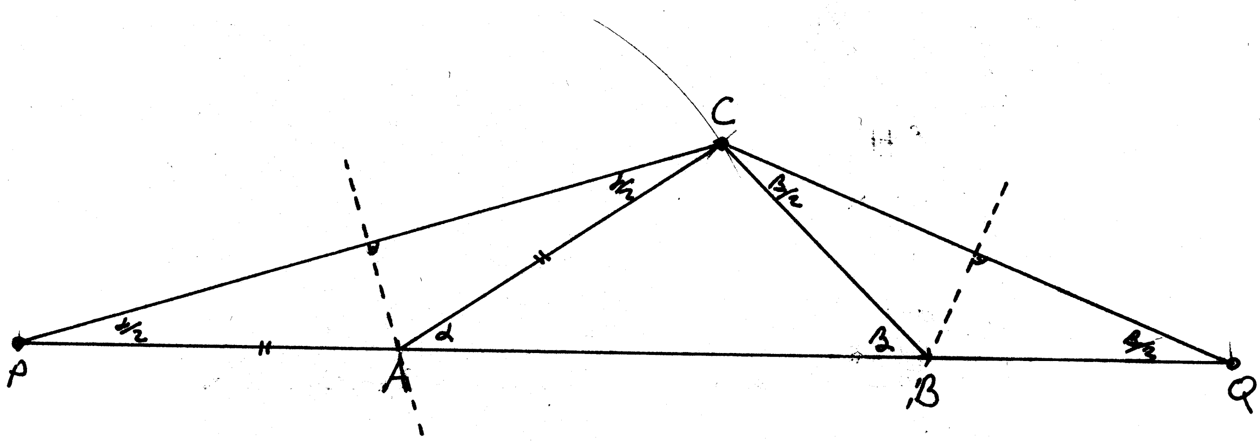
(d) $b-c$, r, $\beta-\gamma$;

(d) a, r, $b-c$;

(#) Konstruisati $\triangle ABC$ ako su dati uglovi α, β i njegov obim.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao $\triangle ABC$ sa uglovima $\measuredangle BAC = \alpha$ i $\measuredangle ABC = \beta$.

Na pravoj $p(A,B)$ uzmimo tačke P i Q takve da je $P-A-B-Q$ i da $PA \cong AC$ i $BC \cong BQ$.

Primjetimo da je $\triangle PAC$ jkk a kako je $\measuredangle CAB = \alpha$ njegov vanjski ugao imamo $\measuredangle APC = \measuredangle PCA = \frac{\alpha}{2}$.

$\triangle CBQ$ je jkk i kako je $\measuredangle ABC = \beta$ njegov vanjski ugao to je $\measuredangle BCQ = \measuredangle BQC = \frac{\beta}{2}$.

Kako nam je poznata stranica PQ (obim trougla $\triangle ABC$) i uglovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ to $\triangle PQC$ možemo konstruisati.

Tačke A i B leže na simetrali stranica PC i QC.

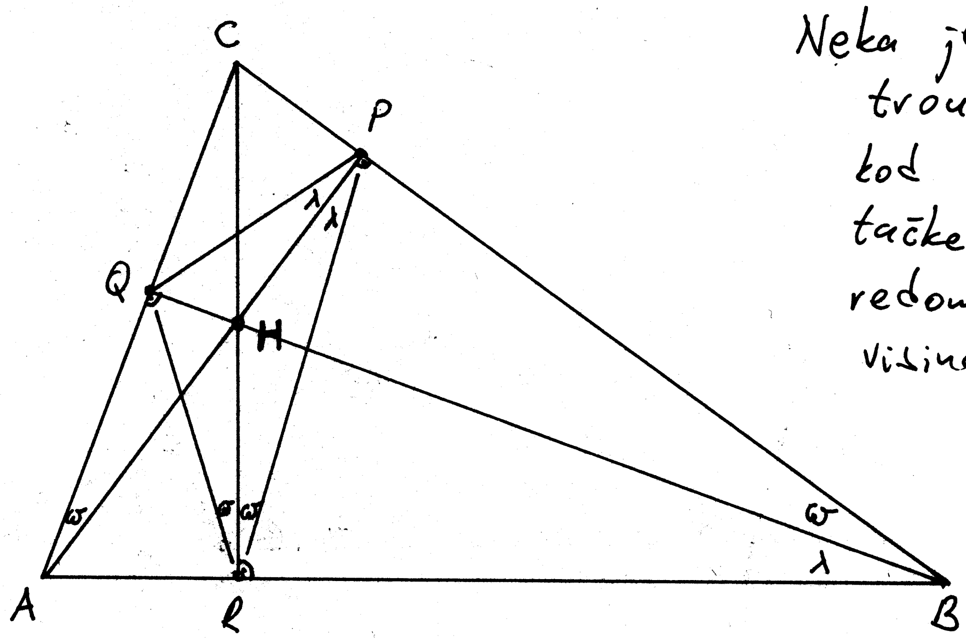
Prema tome $\triangle ABC$ možemo konstruisati.

(tačke A i B možemo dobiti i na drugi način. Kako?)

(#) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R koje su podnožja visina datog trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao $\triangle ABC$ kod koga su tačke P, Q i R redom podnožja visina iz A, B i C.

Označimo sa H presjek visina trougla.

Primjetimo da je $\square ABPQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QPA = \measuredangle ABQ = \lambda$

$\square HRBP$ tetivni $(\measuredangle HPB + \measuredangle HRB = 180^\circ) \Rightarrow \measuredangle RBH = \measuredangle HPR = \lambda$

Prema tome $p[P,H)$ je simetrala $\measuredangle QPR$.

Dalje kako je $\measuredangle ARH + \measuredangle AQH = 180^\circ$ to je

$\square ARHQ$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle QRH = \measuredangle QAH = \omega$

$\square ABPQ$ tetivni (zašto?) $\Rightarrow \measuredangle QAP = \measuredangle QBP = \omega$

Prema tome $p[R,H)$ je simetrala $\measuredangle QRP$.

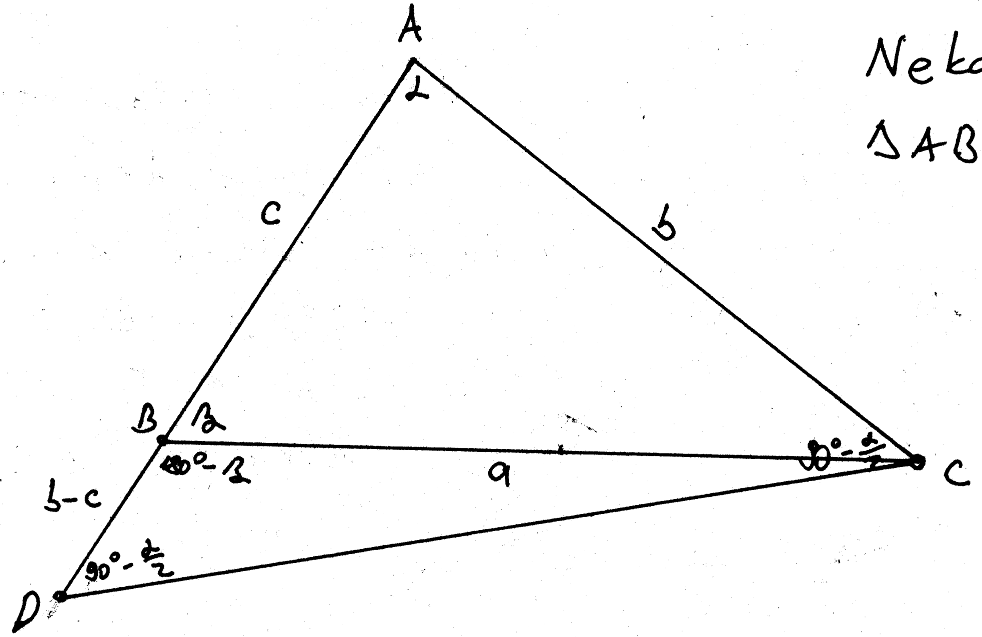
Kako se simetrale uglova u trouglu sijeku u jednoj tački to je i $p[Q,H)$ simetrala $\measuredangle RQP$.

Tačka H je presjek simetrala uglova $\triangle PQR$ pa je možemo konstruisati. Kako znamo da je $p(P,H) \perp p(B,C)$ i $\{B\} = p(B,C) \cap p(Q,H)$ i $\{C\} = p(B,C) \cap p(H,R)$ to možemo konstruisati i tačke B i C a time i $\triangle ABC$.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao β i duž $b-c$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC.

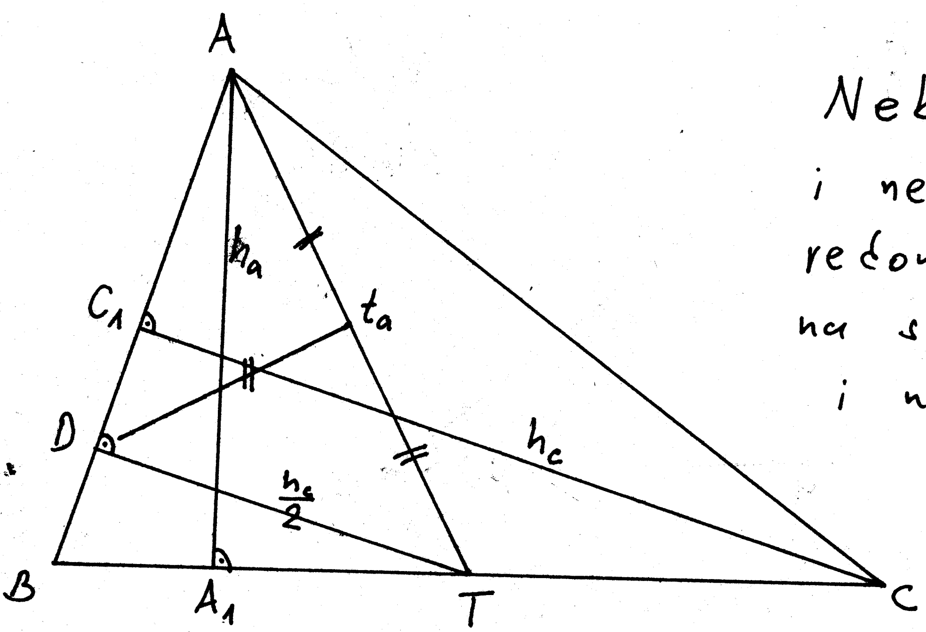
Produžimo stranicu AB do tačke D tako da je $A-B-D$ i $AD \cong AC$. Primjetimo da je $\measuredangle DBC = 180^\circ - \beta$, i da je $BD = b - c$. U ΔDCB su date dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.

Tačku A možemo dobiti na dva načina (kako?) a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati visine h_a i h_c i težišna linija t_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, i neka su AA_1 i CC_1 redom visine spuštene na stranicu BC i AB, i neka je T sredina stranice BC.

Označimo sa D sredinu duži BC_1. Primjetimo da je TD srednja linija ΔBCC_1 pa je $TD \perp AB$ i $TD = \frac{h_c}{2}$.

U ΔAA_1T znamo dvije stranice i ugao od 90° pa ga možemo konstruisati.

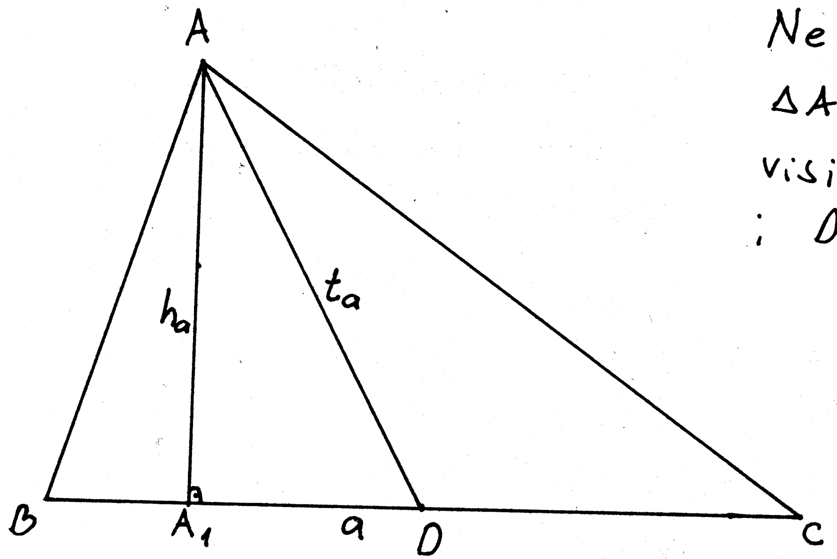
U ΔDTA isto tako znamo dvije stranice i ugao od 90° pa ga možemo konstruisati.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica a, težišnica t_a i visina h_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC u kome su AA_1 visina na stranicu a i D sredina stranice BC.

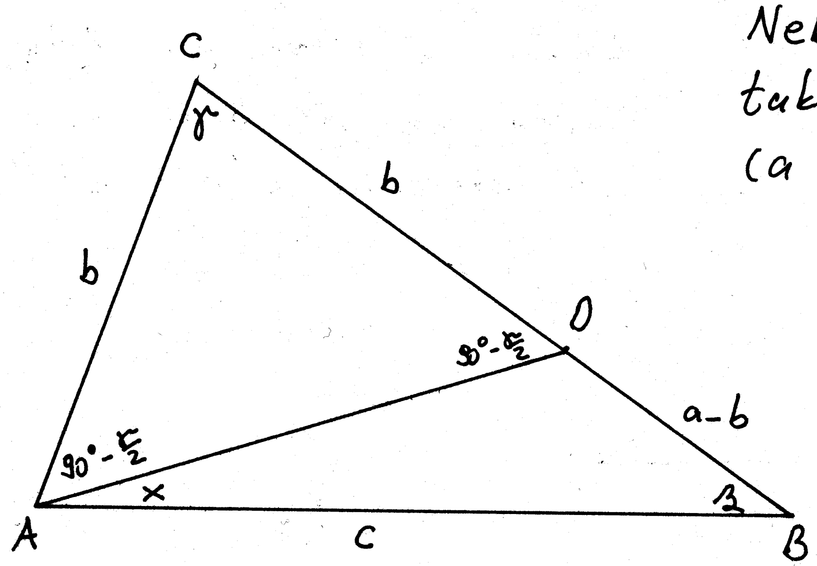
U trouglu ΔAA_1D su nam poznate dvije stranice i ugao (od 90° stepeni) pa ga možemo konstruisati. Znamo da je D sredina stranice BC, pa kako imamo konstruisanu $p(BC)$ to možemo konstruisati tačke B i C a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su dati stranica c, duž $a-b$ i ugao $\alpha-\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat $\triangle ABC$ takav da je $a>b$ (a time i $\alpha>\beta$).



Na stranici a uzmimo tačku D takvu da je $CD=b$.
Tada je $\triangle ADC$ jkk i $BD=a-b$.

$\triangle ADC$ jkk $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = 90° - \frac{\gamma}{2}$

Označimo sa $x = \sphericalangle DAB$.

Imamo:

$$90° - \frac{\gamma}{2} = x + \beta$$

$$- \quad 90° - \frac{\gamma}{2} + x = \alpha$$

$$-x = x + \beta - \alpha$$

$$2x = \alpha - \beta$$

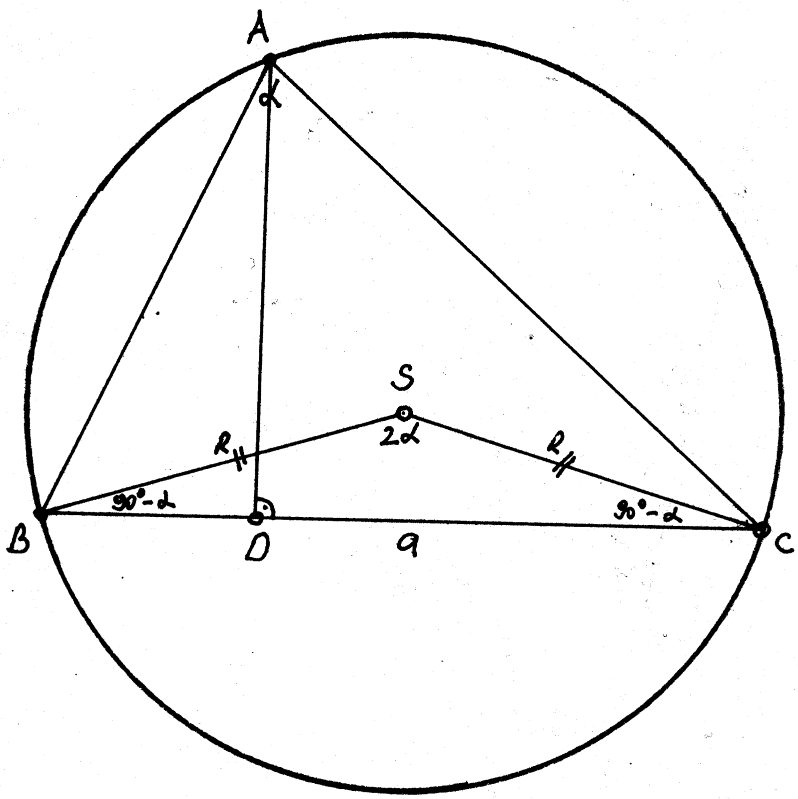
$$x = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

U $\triangle ABD$ su nam poznate dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati.
Tačku C možemo dobiti na dva načina (kao presjek simetrale stranice AD i $p(B,D)$ ili pomoću uglova $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAC$). Prema tome $\triangle ABC$ možemo konstruisati.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je $AD = h_a$ visina na stranica a.

$\measuredangle BAC = \alpha$.

Označimo sa S centar opisane kružnice trougla ΔABC.

Kako je $\measuredangle BAC$ oštri periferiski ugao nad tetivom BC to je $\measuredangle BSC = 2\alpha$.

ΔSBC jkk $\Rightarrow \measuredangle CBS = \measuredangle BCS = 90° - \alpha$.

U trouglu ΔBCS znamo jednu stranicu i veličine sva tri ugla pa ga možemo konstruisati.

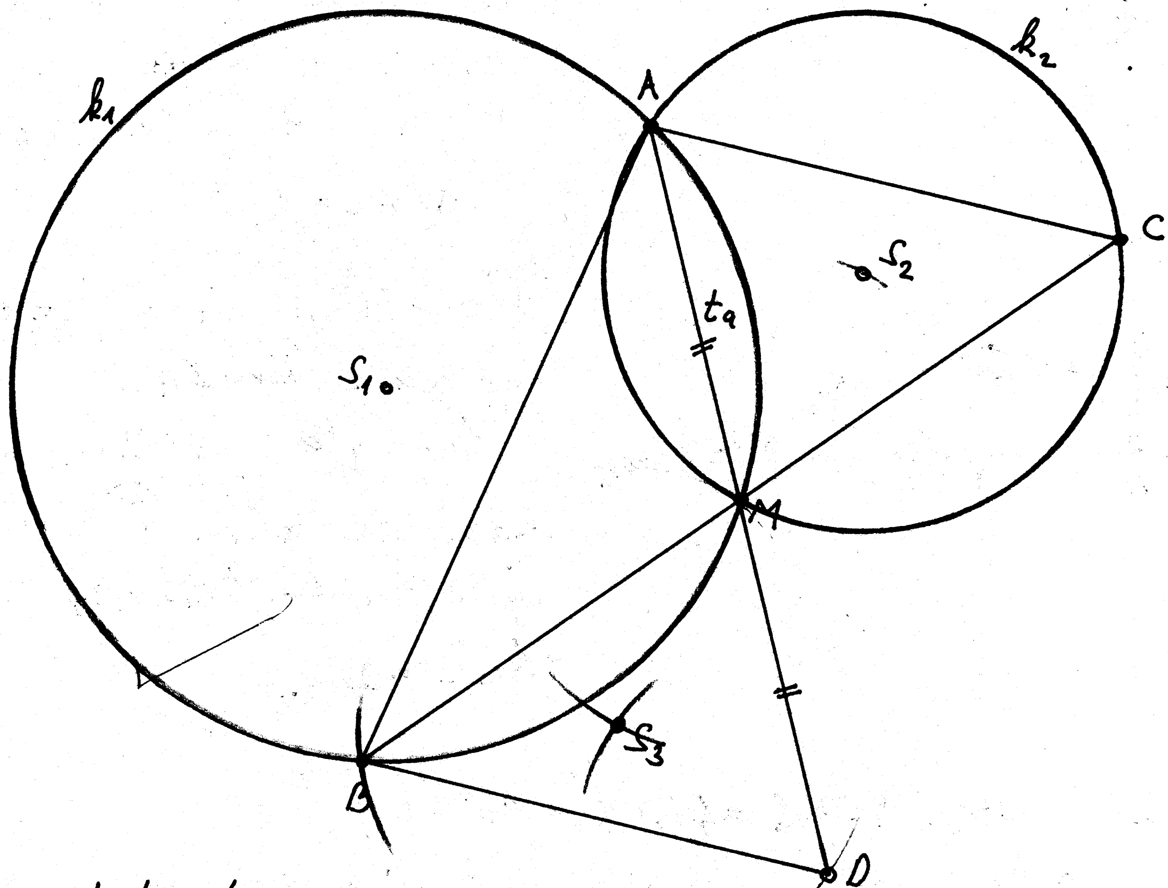
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek $k(S, SB)$ i prave koja je paralelna sa $p(B, C)$ i udaljena od nje za dužinu h_a.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova ΔABM i ΔACM.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC, tačka M sredina stranice BC i tačke S_1 i S_2 centri opisanih kružnica oko trouglova ΔABM i ΔACM.

Kako je data duž $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2, a znamo da je $S_1A = S_1M = R_1$ i $S_2A = S_2M = R_2$ to kružnice $k_1(S_1, R_1)$ i $k_2(S_2, R_2)$ možemo konstruisati.

Ako na pravoj $p(A, M)$ uzmemo tačku D takvu da je A-M-D i $AM \cong MD$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} BM \cong MC \\ \measuredangle BMD \cong \measuredangle CMA \text{ (unakrsni)} \\ MD \cong AM \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta BMD \cong \Delta CMD$$

$\Downarrow$ ova dva trougla imaju podudarne poluprečnike opisane kružnice

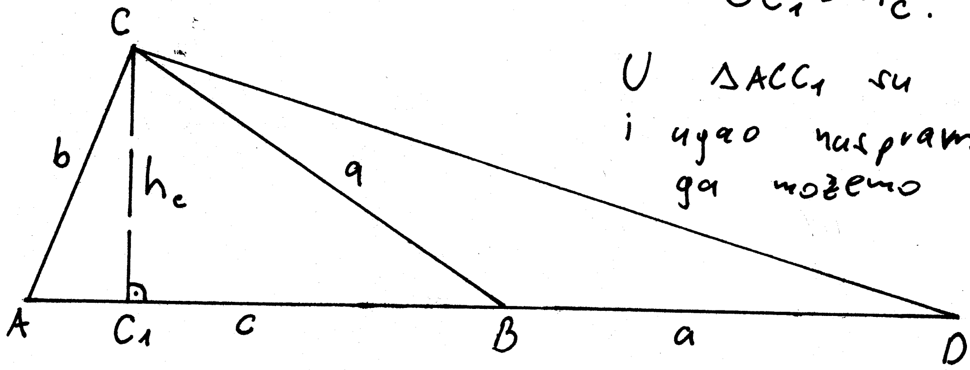
Prema tome centar S_3 opisane kružnice trougla ΔBMD mogu konstruisati, time i tačku B pa i ΔABC.

(#) Konstruisati raznostraničan trougao ΔABC ako su poznati stranica b, visina h_c (koja odgovara stranici c) i zbir $a+c$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC traženi trougao koji ima datu stranicu b, visinu h_c i duž $a+c$. Označimo sa

$CC_1 = h_c$.



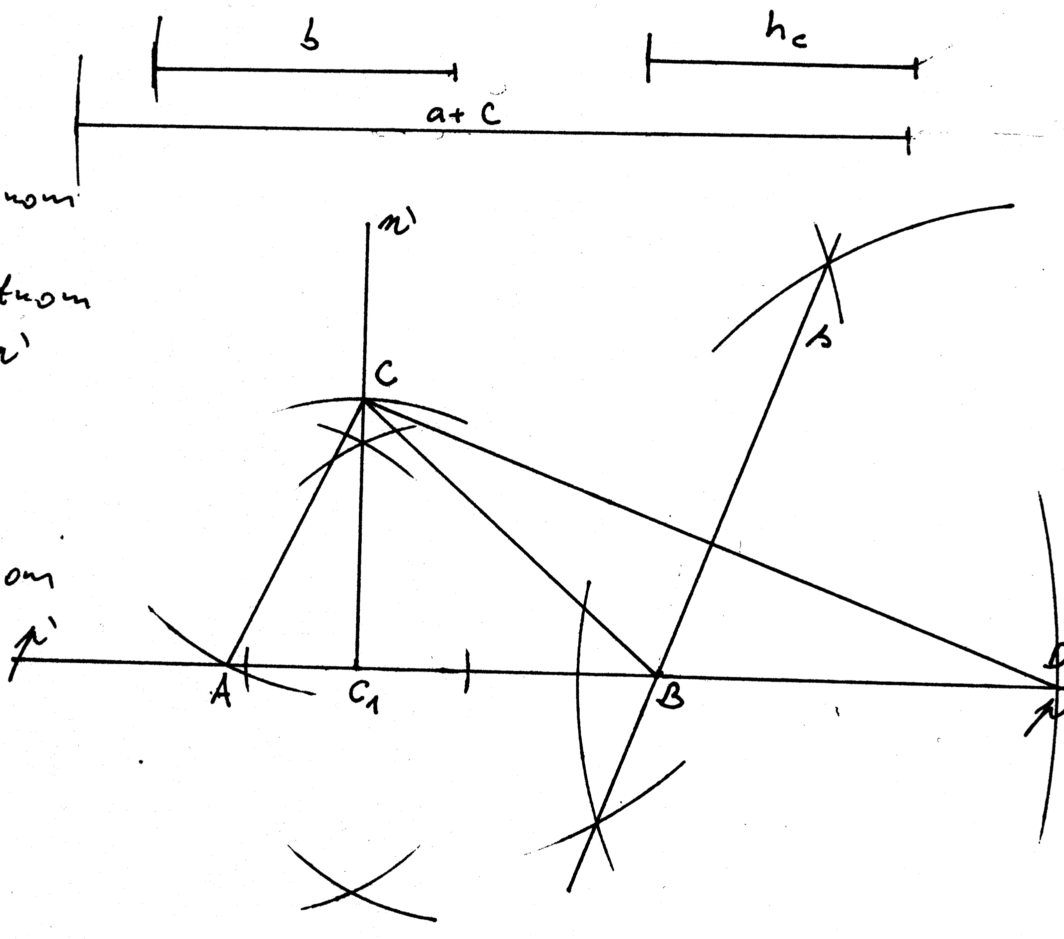
U ΔACC_1 su poznate dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.

Neka je D takva tačka da je A-B-D i $AD = a+c$.

Primjetimo da je ΔBDC jkk (pa tačka B leži na simetrali stranice CD). Sad nije teško konstruisati trougao ΔABC.

Konstrukcija

1. b, h_c, $a+c$
2. poluprava p' sa početnom tačkom C_1
3. poluprava n' sa početnom tačkom C_1 takva $n' \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n' = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. poluprava p'' sa početnom tačkom C_1 koja nadopunjuje polupravu p' do prave p
7. $k(A, a+c) \cap p'' = \{D\}$
8. s simetrala CD
9. $s \cap p = \{B\}$



Dokaz

Da konstruisani trougao ima stranicu b jednaku datoj duži b, visinu h_c jednaku datoj duži h_c i zbir stranica $a+c$ jednaku datoj duži $a+c$ slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Ako je $b < h_c$ ili $b \geq a+c$ zadatak nema rješenje.

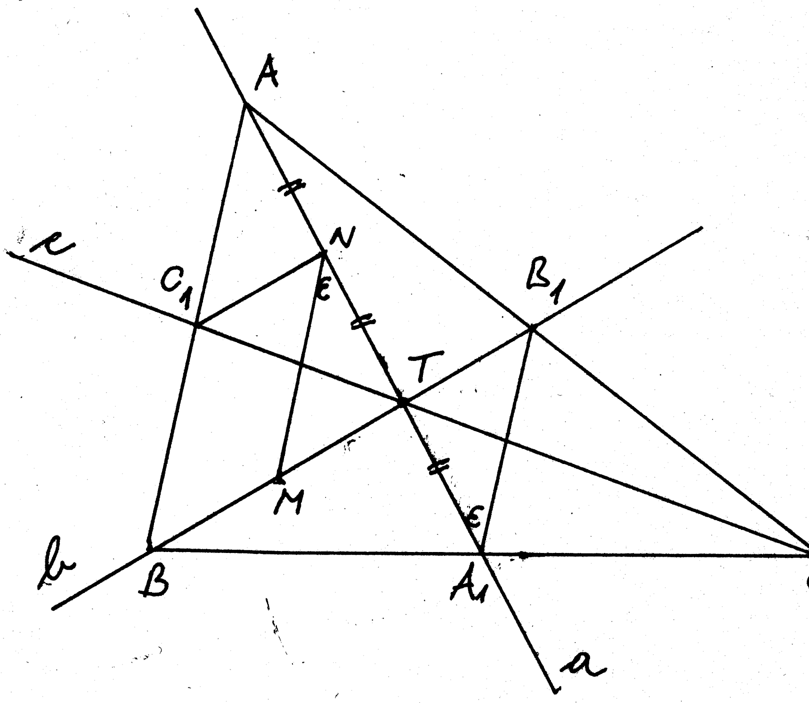
Ako je $b \geq h_c$ i $b < a+c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su a, b i c tri konkurentne prave koje prolaze kroz tačku T, neka su date tačke $A, A_1 \in a$, $B, B_1 \in b$ i $C, C_1 \in c$ takve da ΔABC ima težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1.



A_1B_1 je srednja linija trougla ΔABC pa je $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ ...(*)

Neka su M i N redom sredine duži BT i AT.

MN je srednja linija ΔBTA pa je $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2}AB$ ...(**)

Iz (*) i (**) $MN \parallel A_1B_1$ i $MN \cong A_1B_1$.

$MN \parallel A_1B_1$ i $p(A, A_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TA_1B_1 \cong \measuredangle TNM = \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MTN \cong \measuredangle A_1TB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle TNM \cong \measuredangle TA_1B_1 = \varepsilon \\ MN \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta MTN \cong \Delta TA_1B_1 \Rightarrow TN \cong TA_1$$

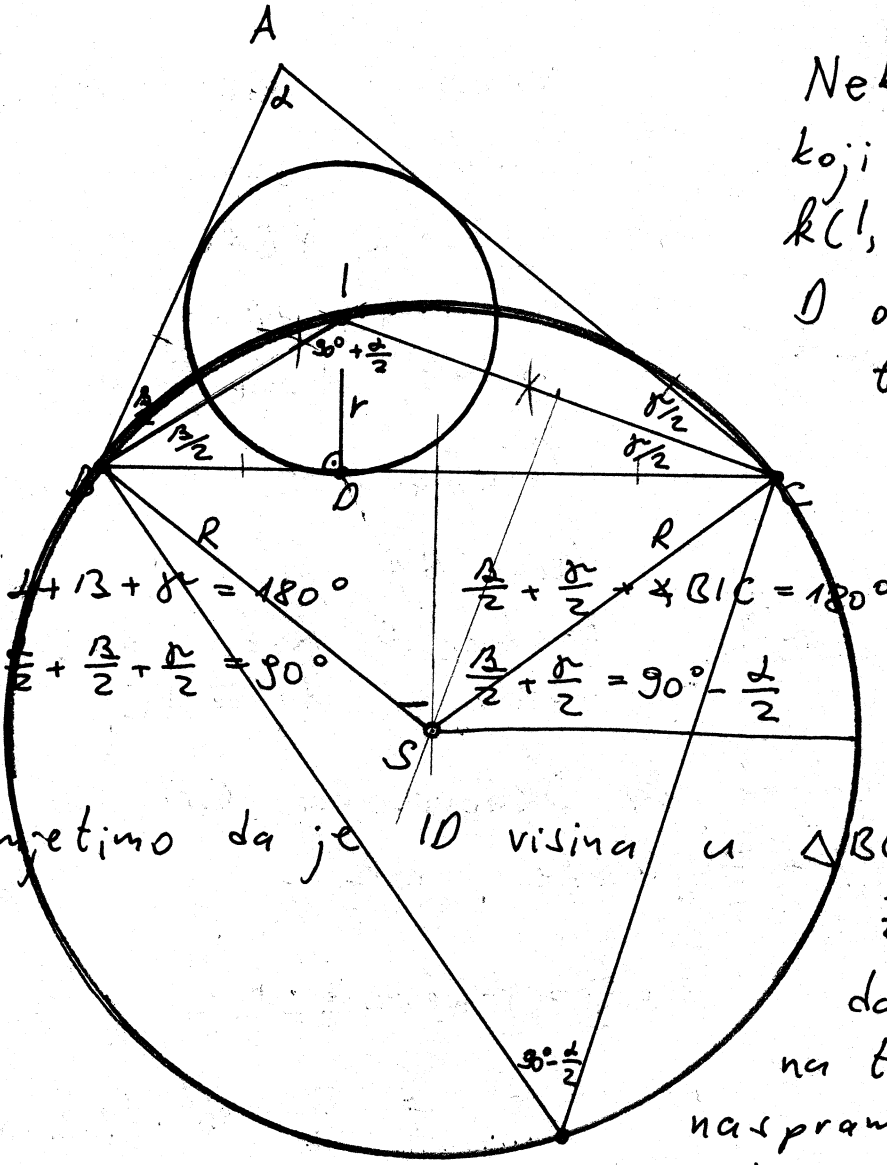
Primjetimo da je C_1N srednja linija $\Delta ABT \Rightarrow C_1N \parallel b$.

Tačke A i T su date pa možemo konstruisati sredinu N duži AT a time i tačku A_1. Kako su date prave a, b, c i znamo da je $C_1N \parallel b$ to možemo konstruisati i tačku C_1. Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, ugao α i poluprečnik kružnice r upisane u taj trougao.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC u koji je upisana kružnica $k(I, r)$, i neka je tačka D ortogonalna projekcija tačke I na stranicu BC.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$

$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \measuredangle BIC = 180°$

$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\measuredangle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$

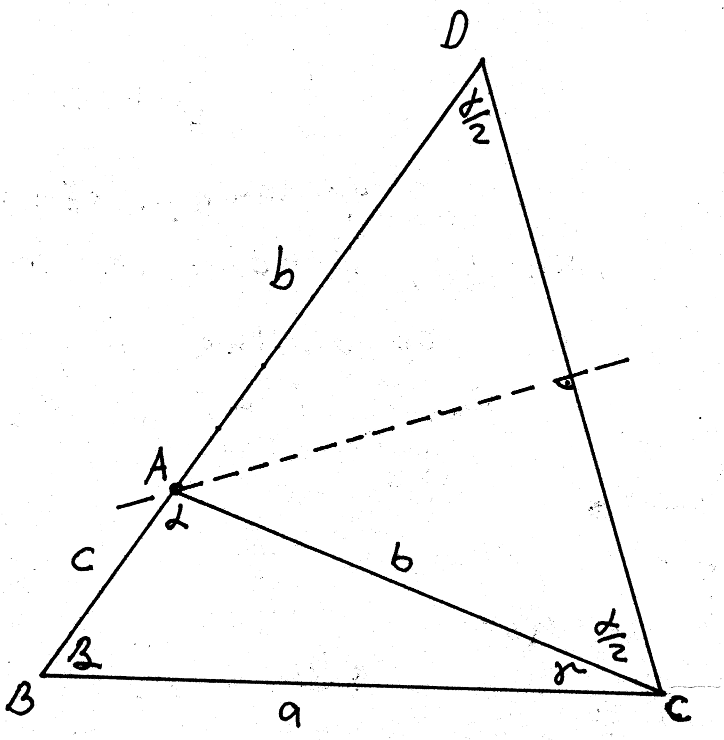
Primjetimo da je ID visina u ΔBCI na stranicu BC. Zadatak u kome je data stranica, visina na tu stranicu i ugao naspram te stranice smo već imali ranije.

Označimo sa S centar opisane kružnice ΔBCI.
U našem slučaju primjetimo da je $\measuredangle BSC = 180° - \alpha$, pa su $\measuredangle SBC \cong \measuredangle BCS = \frac{\alpha}{2}$.
U ΔBSC znamo USU pa ga možemo konstruisati.
Tačka I se nalazi na udaljenosti r od BC pa kako znamo konstruisati $k(S, SB)$ to možemo konstruisati tačku I.
Sad nije teško dobiti tačku A a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, duž $b+c$ i ugao $\beta-\gamma$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat. ΔABC. Uvedimo oznake $\measuredangle ABC=\beta$, $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle BCA=\gamma$, $AB=c$, $BC=c$, $AC=b$.

Duž BA produžimo do tačke D tako da je $B-A-D$ i $AD\cong AC$.

Primjetimo da je ΔDAC jkk sa osnovicom CD i da je $\measuredangle ADC\cong\measuredangle ACD=\frac{\alpha}{2}$. Dalje imamo:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma+\frac{\alpha}{2}=\gamma+90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=$$

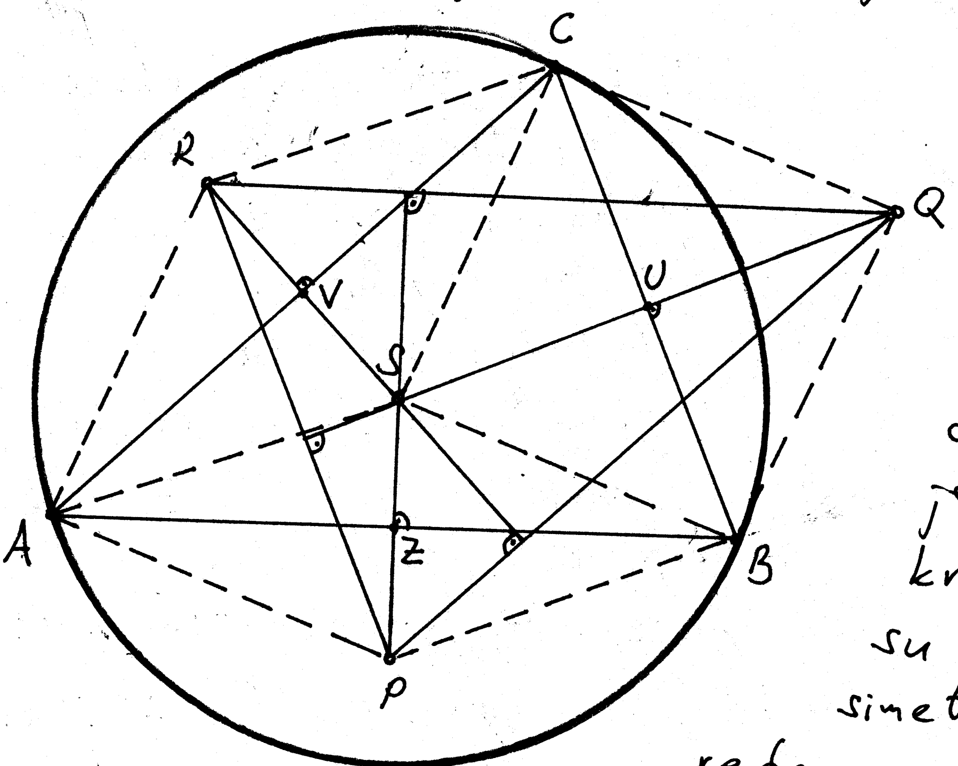
$$=90^\circ-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

U ΔBCD znamo dvije stranice i ugao pa ga možemo konstruisati. Tačka A pripada simetrali stranice DC pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične centru opisane kružnice trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je ΔABC dati trougao čiji je centar opisane kružnice S i neka su P, Q i R tačke simetrične tački S redom u odnosu na stranice trougla AB, BC i AC.

Tačka S pripada simetrali stranica AB, BC i AC.
Označimo sa U, V i Z ortogonalne projekcije tačke S na stranice BC, AC i AB. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} SU \cong QU \\ \sphericalangle SUB \cong \sphericalangle QUB \\ BU \cong BU \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \Delta SUB \cong \Delta QUB \Rightarrow SB \cong QB.$$

Slično bi pokazali sljedeće (isprekidane duži na slici):

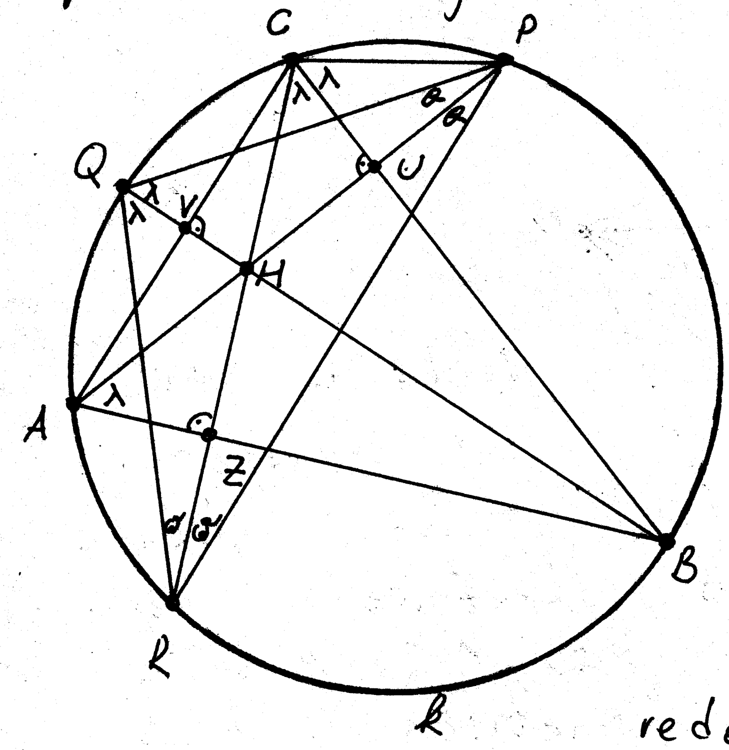
$BQ \cong CQ \cong SC \cong RC \cong AR \cong AS \cong AP \cong BP \cong BS$ (za vježbu).

$BQ \parallel CS \parallel AR$ i $AR \cong BQ \Rightarrow \square ABQR$ paralelogram,
pa kako je $p(P,S) \perp p(A,B)$ to je i $p(P,S) \perp p(R,Q)$.
Slično bi pokazali da je $p(R,S) \perp p(P,Q)$ i $p(Q,S) \perp p(P,R)$ (za vježbu).
Tačka S je presjek visina ΔPQR pa je možemo konstruisati.
Sad možemo konstruisati i ΔABC (presjek simetrala duži PS, QS i RS).

Konstruisati trougao ΔABC ako su date tri tačke P, Q i R koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka H ortocentar datog trougla ΔABC. Neka su P, Q i R tačke koje su u odnosu na stranice trougla simetrične ortocentru. Označimo sa U, V i Z tačke koje su ortogonalne projekcije ortocentra H redom na stranice BC, AC i AB.

Označimo sa k kružnicu opisanu oko ΔABC. Dokažimo da tačke P, Q i R leže na kružnici k.

Posmatrajmo $\square ABPC$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} HU \cong PU \\ \measuredangle HUC \cong \measuredangle PUC = 90^\circ \\ CU \cong CU \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta HUC \cong \Delta PUC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle HCU \cong \measuredangle PCU = \lambda$$

U trouglu ΔAZH imamo $\measuredangle AZH = 90^\circ$, $\measuredangle AHZ = \measuredangle CHU \Rightarrow \measuredangle ZAH = \lambda$.

Uglovi $\measuredangle BAP$ i $\measuredangle BCP$ su podudarni i pleđaju na istu stranicu $BP \Rightarrow \square ABPC$ tetivni.

Slično dokazujemo za tačke R i Q (za vježbu).

$\square QRBC$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle RQB = \measuredangle RCB = \lambda$

$\square QABP$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle PAB = \measuredangle BQP = \lambda$

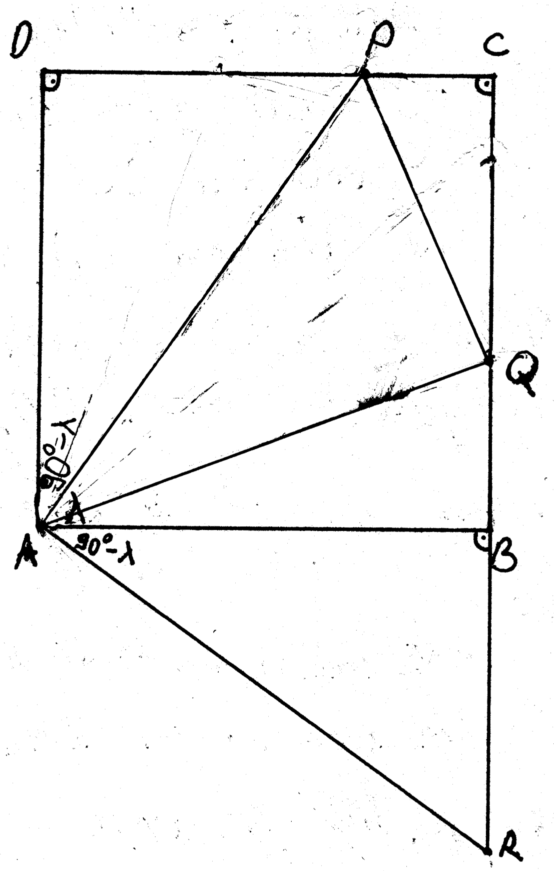
Slično bi pokazali da je $\measuredangle QRC = \measuredangle PRC = \omega$ i $\measuredangle QPA = \measuredangle RPA = \theta$.
(za vježbu).

Kako kružnicu k možemo konstruisati, sad možemo konstruisati i ΔABC.

Konstruisati kvadrat ako je dato jedno tjeme i po jedna tačka na stranicama koje ne sadrže to tjeme.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ kod koga je $P \in CD$ i $Q \in BC$.

Označimo sa $\lambda = \sphericalangle PAB$.

Tada je $\sphericalangle PAD = 90° - \lambda$

Neka je $R \in p(C,B)$: $C-B-R$ i $\sphericalangle BAR = 90° - \lambda$.

Tad
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DAP = \sphericalangle BAR = 90° - \lambda \\ AD = AB \\ \sphericalangle ADP = \sphericalangle ABR = 90° \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle ADP \cong \triangle ABR$$
$$\Downarrow$$
$$AP \cong AR$$

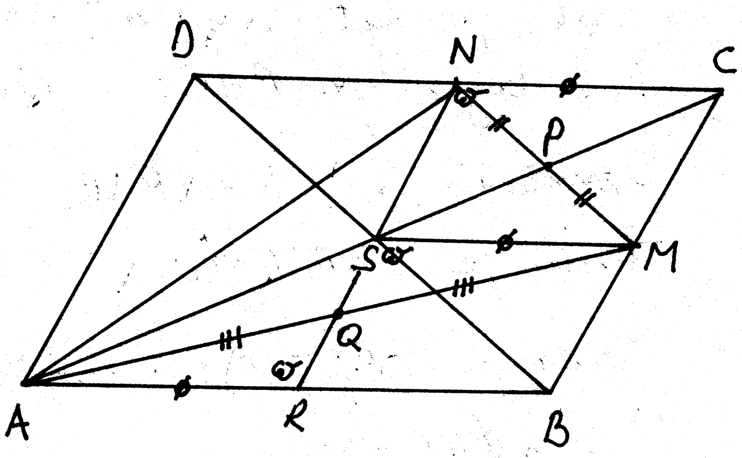
Primjetimo da je i
$\sphericalangle PAR = 90°$.

Kako su date tačke A, P i Q sad nije problem konstruisati tačku R a poslije nje tačke B i C.
Prema tome kvadrat $\square ABCD$ možemo konstruisati.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram □ABCD, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram □ABCD, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\overset{u\ \triangle BCD}{\Longrightarrow}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\overset{u\ \triangle DBC}{\Longrightarrow}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je □SMCN paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad $\left.\begin{array}{l} \measuredangle ASR \cong \measuredangle NSC \\ \measuredangle ARS \cong \measuredangle SNC = \omega \\ AS \cong SC \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Downarrow AR \cong CN \ ...(*)$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada: $\left.\begin{array}{l} \measuredangle AQR \cong \measuredangle SQM \\ \measuredangle QRA \cong \measuredangle QSM = \omega \\ AR \cong SM \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Downarrow AQ \cong QM \ ...(**)$

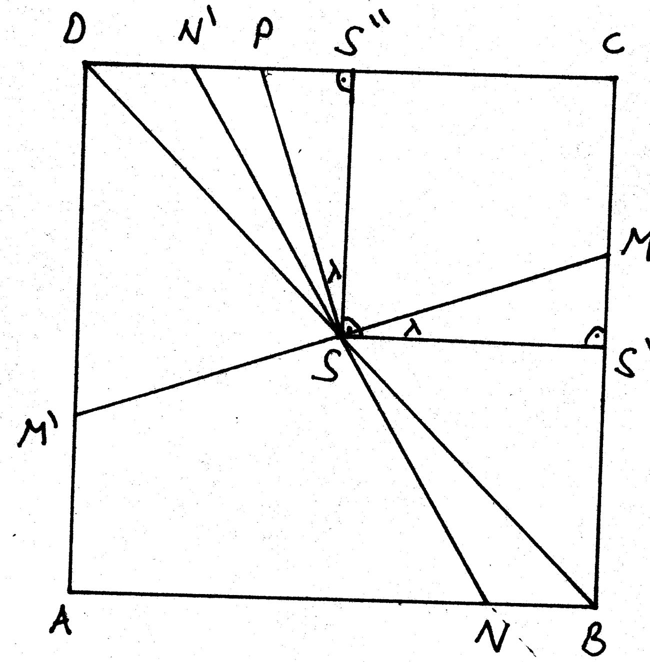
Na osnovu (*) i (**) $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i □ABCD.

(#) Konstruisati kvadrat ako je dat njegov centar opisane kružnice i dvije tačke koje pripadaju nekim od njegovih stranica.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat kvadrat $\square ABCD$ čiji je centar opisane kružnice tačka S (ujedno i presjek dijagonala) i neka su date tačke $M \in BC$ i $N \in AB$.

$p(M,S) \cap AD = \{M'\}$

$p(N,S) \cap CD = \{N'\}$

Neka su S' i S'' redom sredine stranica BC i CD.

$$\left.\begin{array}{l} SS' \text{ srednja linija } \triangle DBC \Rightarrow SS' = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} AB \\ SS'' \text{ srednja linija } \triangle ACD \Rightarrow SS'' = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB \end{array}\right\} \Rightarrow SS' \cong SS''$$

Nije teško pokazati (st podudarnosti USU) da je $MS \cong M'S$ i da je $NS \cong N'S$.

Neka je $P \in CD$ takva $SP \perp MM'$. Označimo sa $\lambda = \angle PSS''$.

$\angle PSS' = 90^\circ + \lambda$, $\angle PSS' = \angle PSM + \angle MSS' = 90^\circ + \angle MSS'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MSS' = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} \angle MSS' \cong \angle S''SP = \lambda \\ SS' \cong SS'' \\ \angle SS'M \cong \angle SS''P = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle SS'M \cong \triangle SS''P$$

$$\Downarrow$$

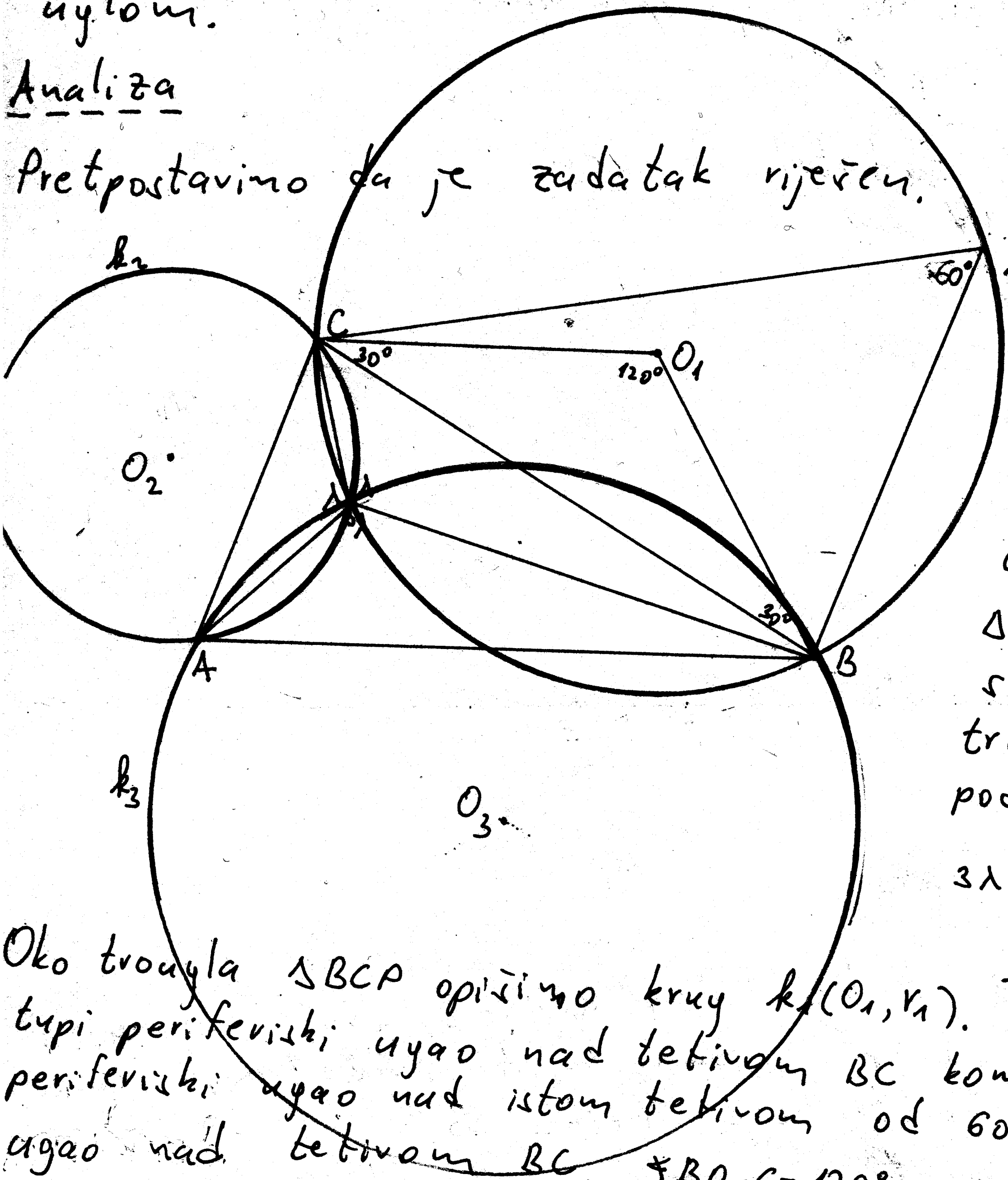
$$SM \cong PS$$

Kako su nam date tačke M i S to možemo konstruisati duž MM' a poslije toga i tačku P. Kako možemo konstruisati duž NN' time nije teško konstruisati i kvadrat $\square ABCD$.

(#) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri strane trougla vide pod podudarnim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka P u unutrašnjosti ΔABC iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglom λ.

$3\lambda = 360° \Rightarrow \lambda = 120°$

Oko trougla ΔBCP opišimo krug $k_1(O_1, r_1)$. Tada je $\measuredangle BPC = 120°$ tupi periferijski ugao nad tetivom BC kome odgovara oštri periferijski ugao nad istom tetivom od $60°$ pa je centralni ugao nad tetivom BC, $\measuredangle BO_1C = 120°$.

ΔBO_1C jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1CB = \measuredangle CBO_1 = 30°$.

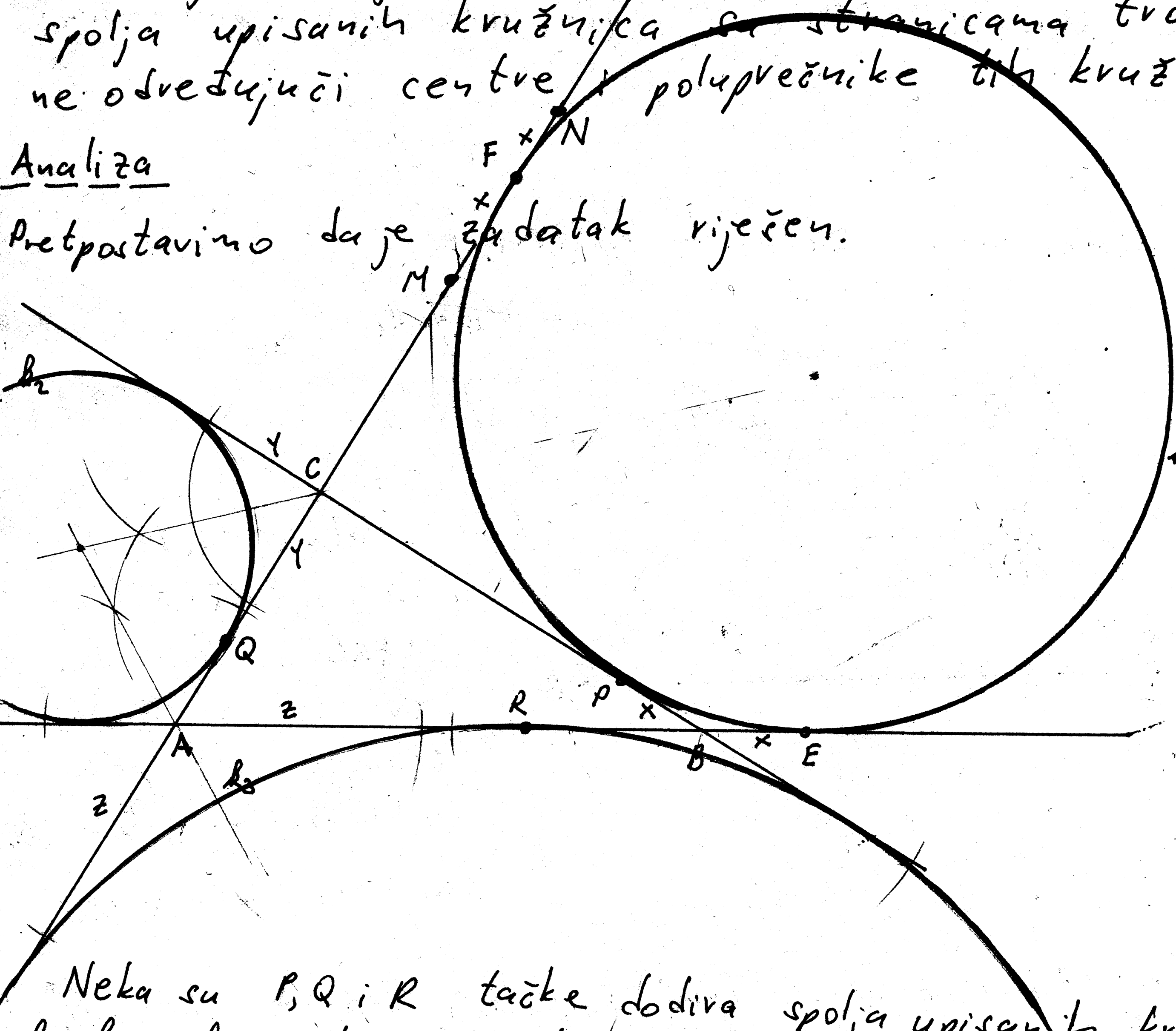
Ako bi oko trougla ΔAPC opisali krug $k_2(O_2, r_2)$ ili oko ΔABP opisali krug $k_3(O_3, r_3)$ na sličan način bi došli do rezultata $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle O_2AC = \measuredangle BAO_3 = \measuredangle ABO_3 = 30°$.

Kako možemo konstruisati kružnice k_1, k_2 i k_3 time možemo konstruisati i tačku P.

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su P, Q i R tačke dodira spolja upisanih kružnica k_1, k_2 i k_3 redom sa stranicama BC, AC i AB trougla ΔABC.
Analizirat ćemo konstrukciju tačke R.
Na kružnici k_1 imamo tri para tangentnih duži tj.

$BE \cong BP$, $CP \cong CF$, $AF \cong AE$ (E i F su tačke dodira k_1 i $p(A,B)$ i $p(A,C)$)

Neka je $M \in p(A,C)$: $AM \cong AB \Rightarrow MF = BE = x$.

Neka je $N \in p(A,C)$: $CN \cong CB \Rightarrow NF = PB = BE = x$.

Sad imam $MN = AN - AM = b + a - c$

pa je $x = \frac{MN}{2} = \frac{b+a-c}{2}$.

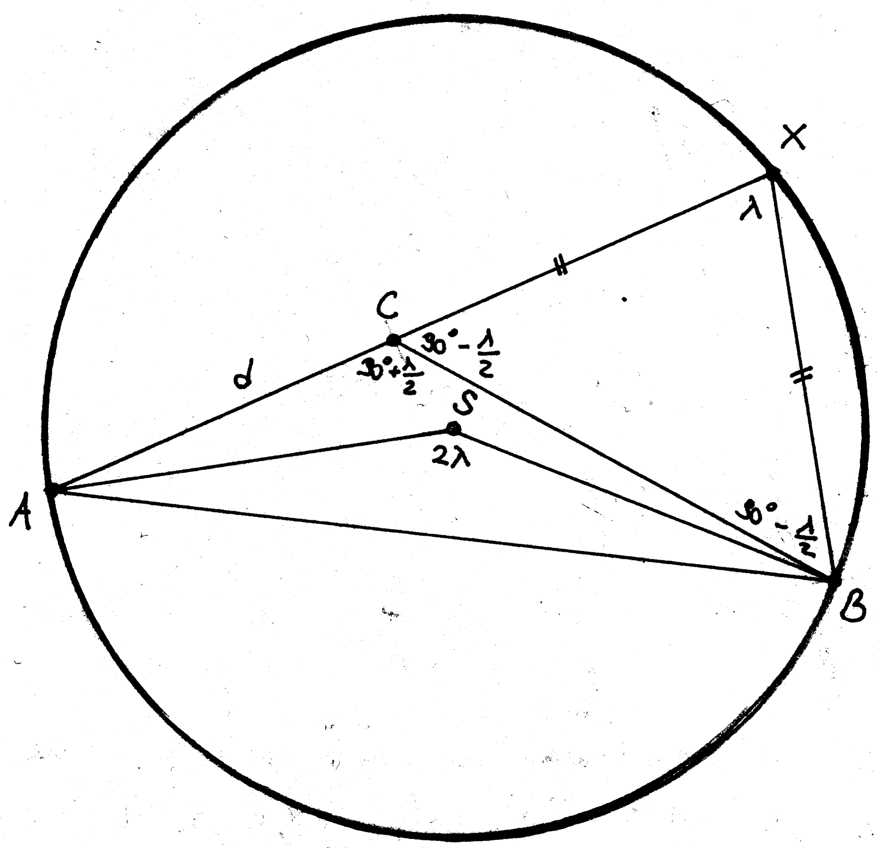
Slično bi pokazali da je $y = \frac{c+b-a}{2}$ i $z = \frac{a+c-b}{2}$.

Kako znamo duži x, y i z sad nije teško konstruisati tačke P, Q i R.

(#) Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX - BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica k s centrom u S takva da prolazi kroz tačke A, B i X i da je $AX - BX = d$, gdje je d data duž.

Uzmimo tačku C na duži AX tako da je $AC = d$. Tada je $CX = BX$.

$$\sphericalangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle AXB = \lambda \overset{\triangle CBX \text{ jkk}}{\Longrightarrow} \sphericalangle XCB = \sphericalangle CBX = 90^\circ - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACB = 90^\circ + \frac{\lambda}{2}$$

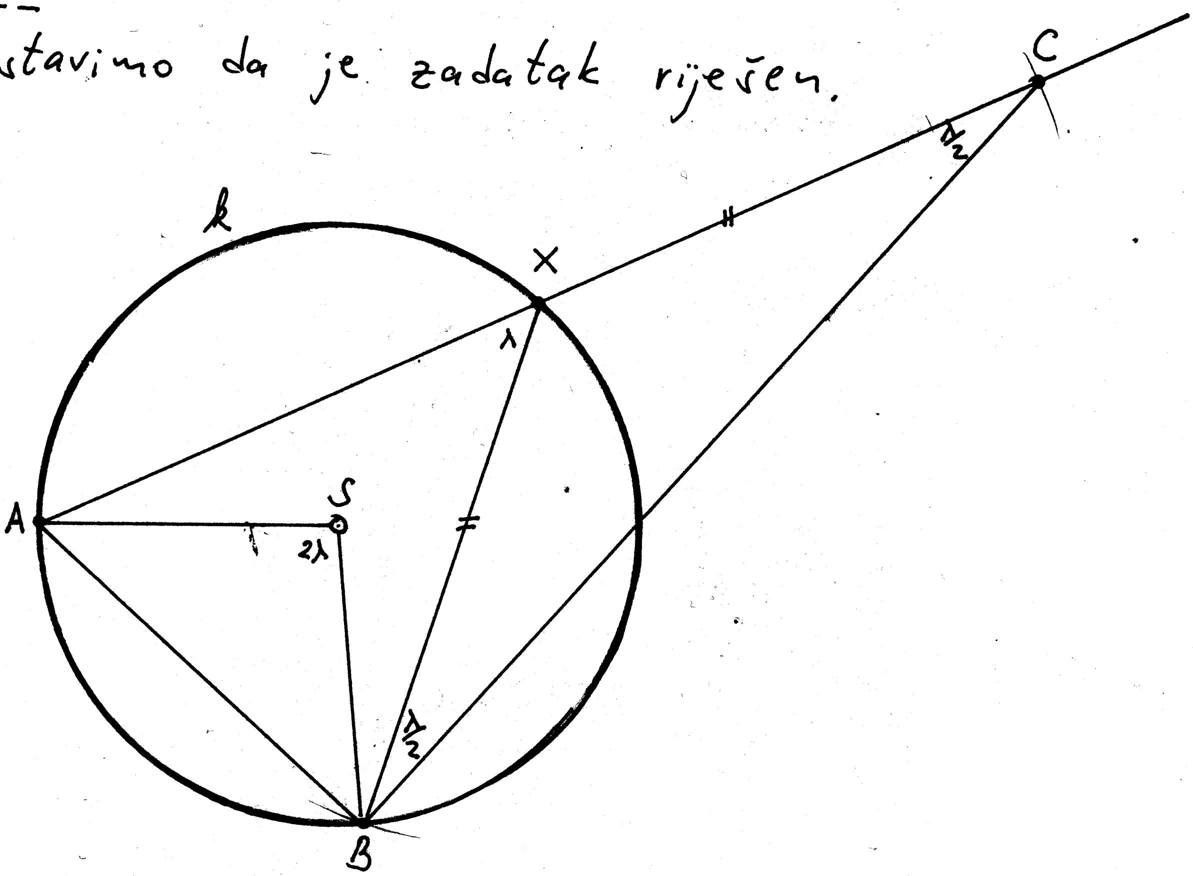
U trouglu $\triangle ABC$ su poznate dvije stranice i tup ugao pa ga možemo konstruisati.

Prema tome tačka X kružnice k možemo konstruisati.

(#) Na datoj kružnici k date su tačke A i B. Konstruisati tačku X kružnice k, tako da je $AX + BX = d$ gdje je d data duž.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica s centrom u S opisana oko tački A, B i X tako da je $AX + BX = d$, gdje je d neka data duž.

Duž AX produžimo do tačke C tako da je $A - X - C$ i $BX \cong CX$.

$$\measuredangle ASB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle AXB = \lambda \overset{\Delta BCX \text{ jkk}}{\Rightarrow} \measuredangle XBC = \measuredangle XCB = \frac{\lambda}{2}$$

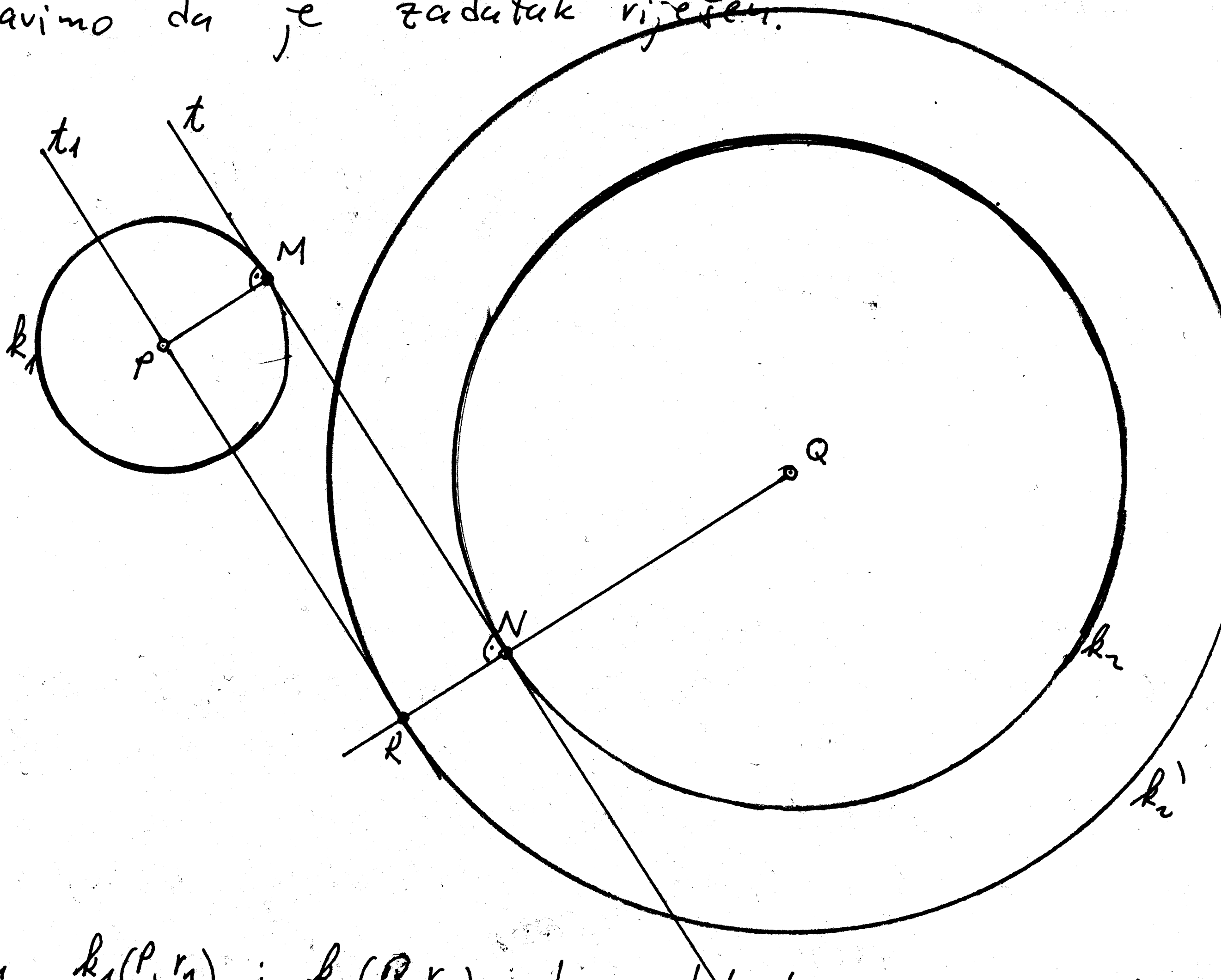
Kako ugao $\frac{\lambda}{2}$ mogu konstruisati to u ΔABC su poznate dvije stranice (AC i AB) i ugao ($\measuredangle ACB$) pa ga možemo konstruisati.

Tačku X kružnice k možemo konstruisati.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t$ $\Rightarrow$ $p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

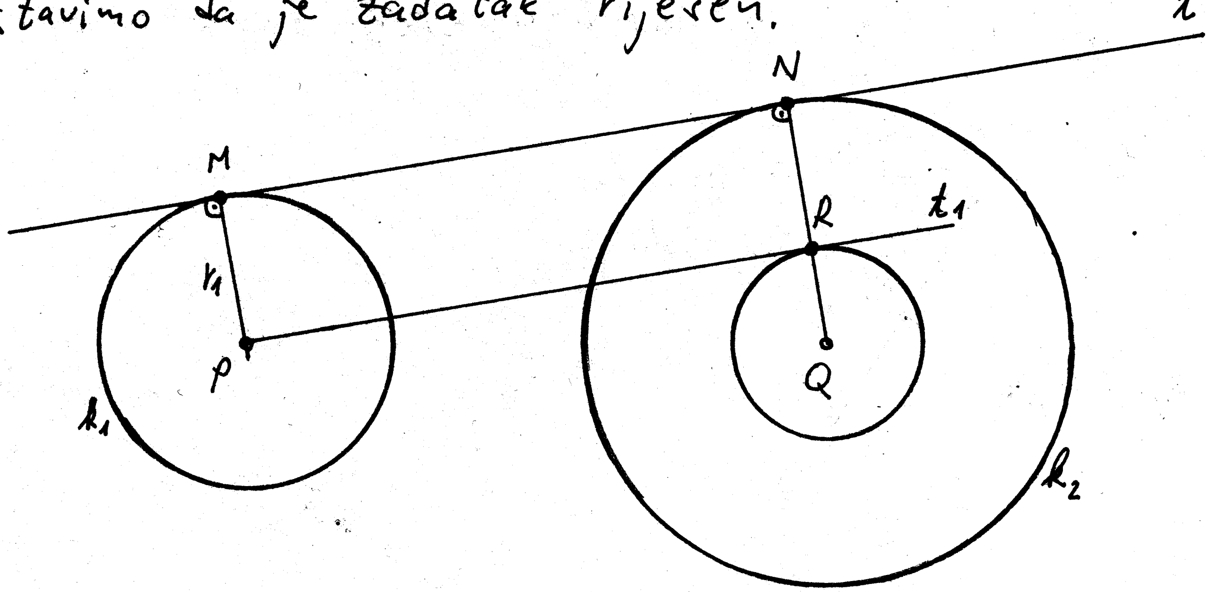
Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Konstruisati vanjsku zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta ($r_2 > r_1$). Označimo sa M tačku dodira k_1 i t, a sa N tačku dodira k_2 i t.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $t_1 \ni P$ i $t_1 \cap NQ = \{R\}$ $(NQ > PM)$.

Imamo da je $\square PRNM$ paralelogram (preciznije pravougaonik).

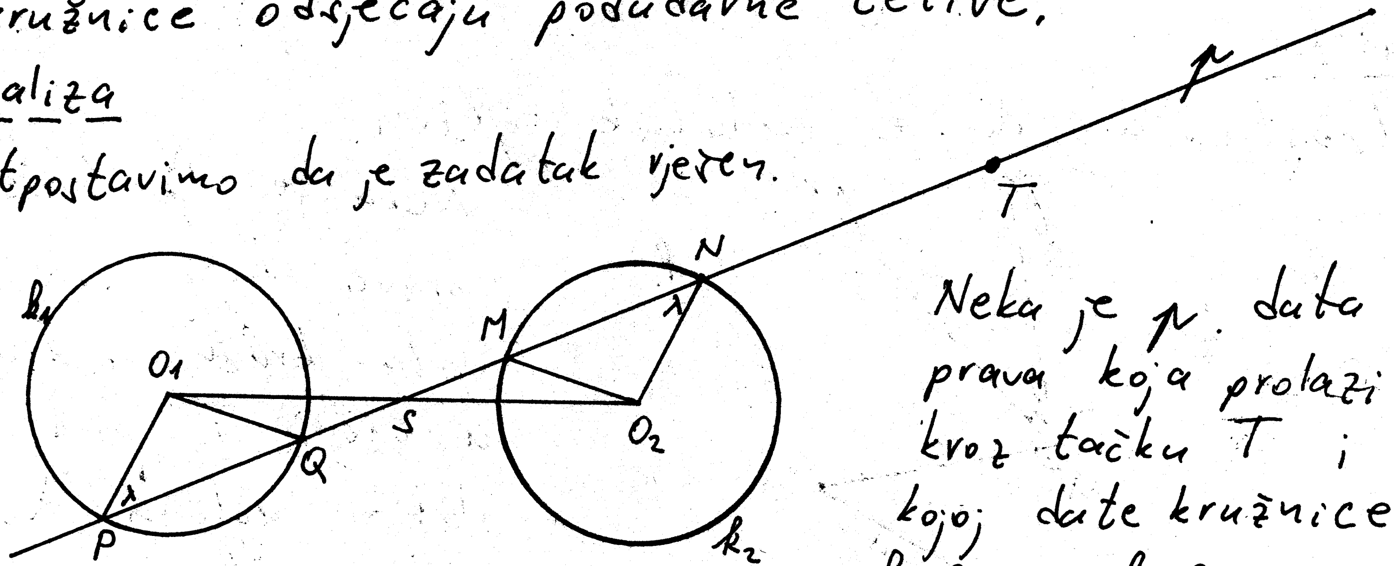
$QR = r_2 - r_1$, pa kako su tačke P i Q date mogu konstruisati tangentu t_1.

Tangenta t je paralelna sa t_1 i udaljena je od t_1 za dužinu r_1, pa je možemo konstruisati.

(#) Date su podudarne kružnice k_1 i k_2 i tačka T. Kroz tačku T konstruisati pravu na kojoj date kružnice odsjecaju podudarne tetive.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku T i kojoj date kružnice $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$ odsjecaju podudarne tetive PQ i MN.

$\Delta PQO_1 \cong \Delta MO_2N$ (podud. SSS)

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1PQ \cong \measuredangle MNO_2 = \lambda$. Neka je $\{S\} = p \cap O_1O_2$.

Sad imamo $\left.\begin{array}{l} \measuredangle O_1SP \cong \measuredangle NSO_2 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle SPO_1 \cong \measuredangle SNO_2 = \lambda \\ PO_1 \cong NO_2 = r \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta PSO_1 \cong \Delta NSO_2$

$\Downarrow$

$O_1S \cong O_2S$.

Prema tome S je sredina duži O_1O_2 pa pravu p sad nije teško konstruisati.

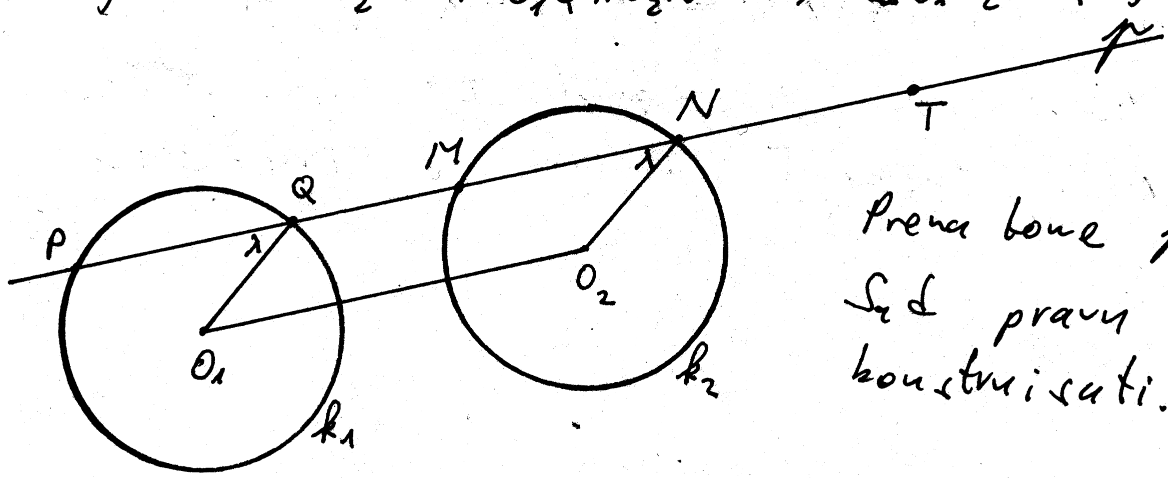
II način

Iz podudarnosti SSS $\Rightarrow \Delta PQO_1 \cong \Delta MNO_2$

$\Downarrow$

$\measuredangle O_1QP \cong \measuredangle O_2NM = \lambda$.

Kako je $O_1Q \cong O_2N$ i $O_1Q \parallel O_2N \Rightarrow \square O_1O_2NQ$ je paralelogram.



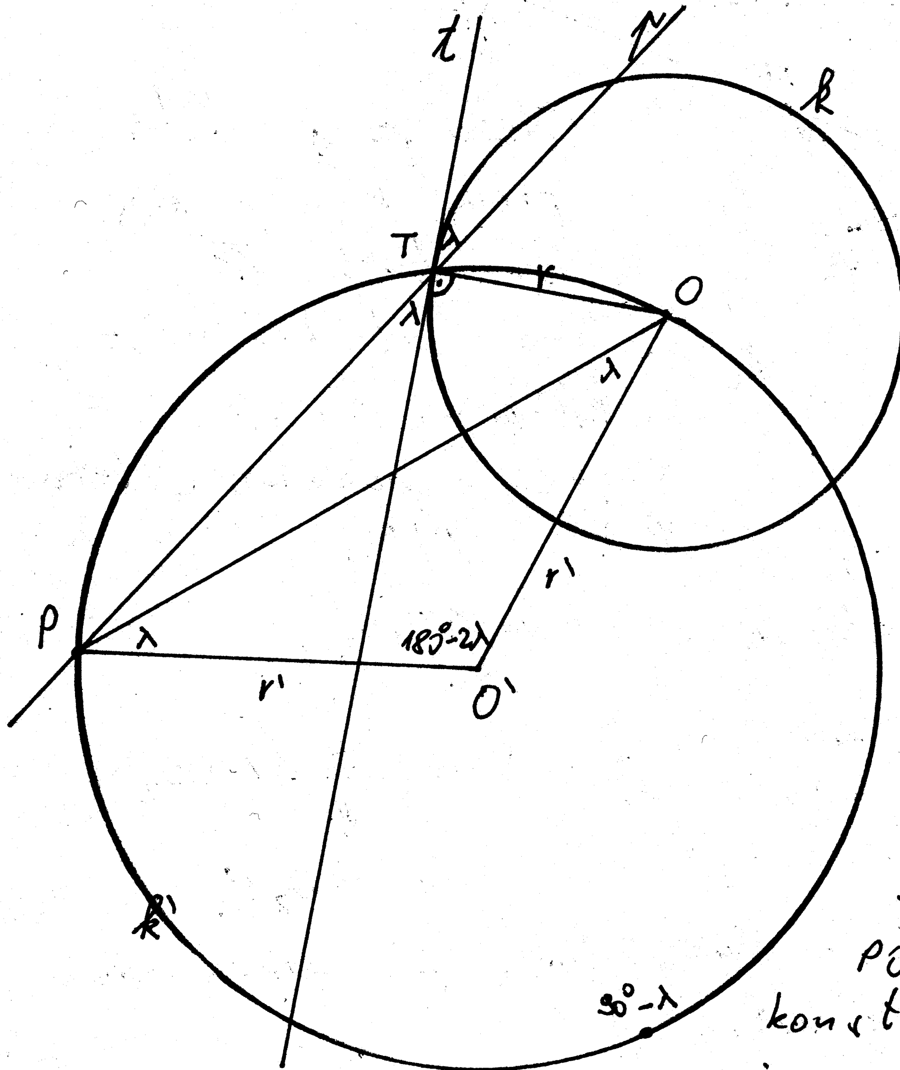
Prema tome $p \parallel O_1O_2$.

Sad pravu p možemo konstruisati.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu koja siječe datu kružnicu pod datim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe datu kružnicu $k(O,r)$ u tački T, pod datim uglom λ. Neka je t tangenta na krug k u tački T.

I način

Primjetimo da je ugao $\sphericalangle OTP = 90° + \lambda$. Kako su poluprečnik r i duž PO poznati to nije teško konstruisati $\sphericalangle OPT$ a time i pravu p.

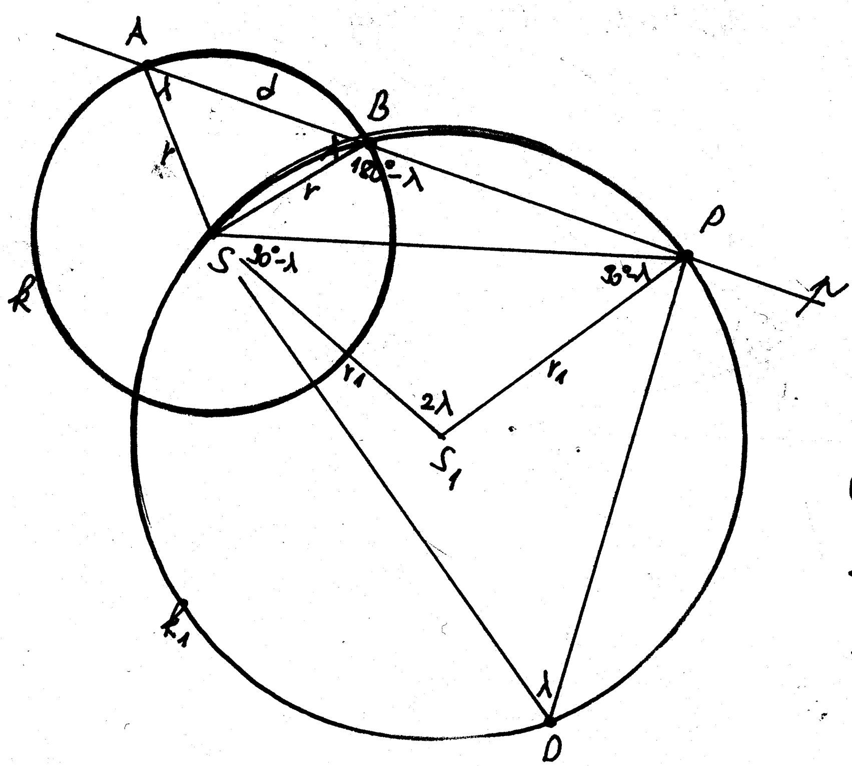
II način

Primjetimo da je $\sphericalangle OTP = 90° + \lambda$. Neka je $k'(O', r')$ kružnica opisana oko trougla $\triangle POT$. Tada je $\sphericalangle PO'O = 180° - 2\lambda$ (Zašto?) pa je i $\sphericalangle OPO' = \sphericalangle O'OP = \lambda$ (Zašto?). Kako su duž PO i ugao λ poznati to nije teško konstruisati $\triangle PO'O$, tačku T pa time i traženu pravu p.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\measuredangle SAB \cong \measuredangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \quad \measuredangle PBS = 180^\circ - \lambda$

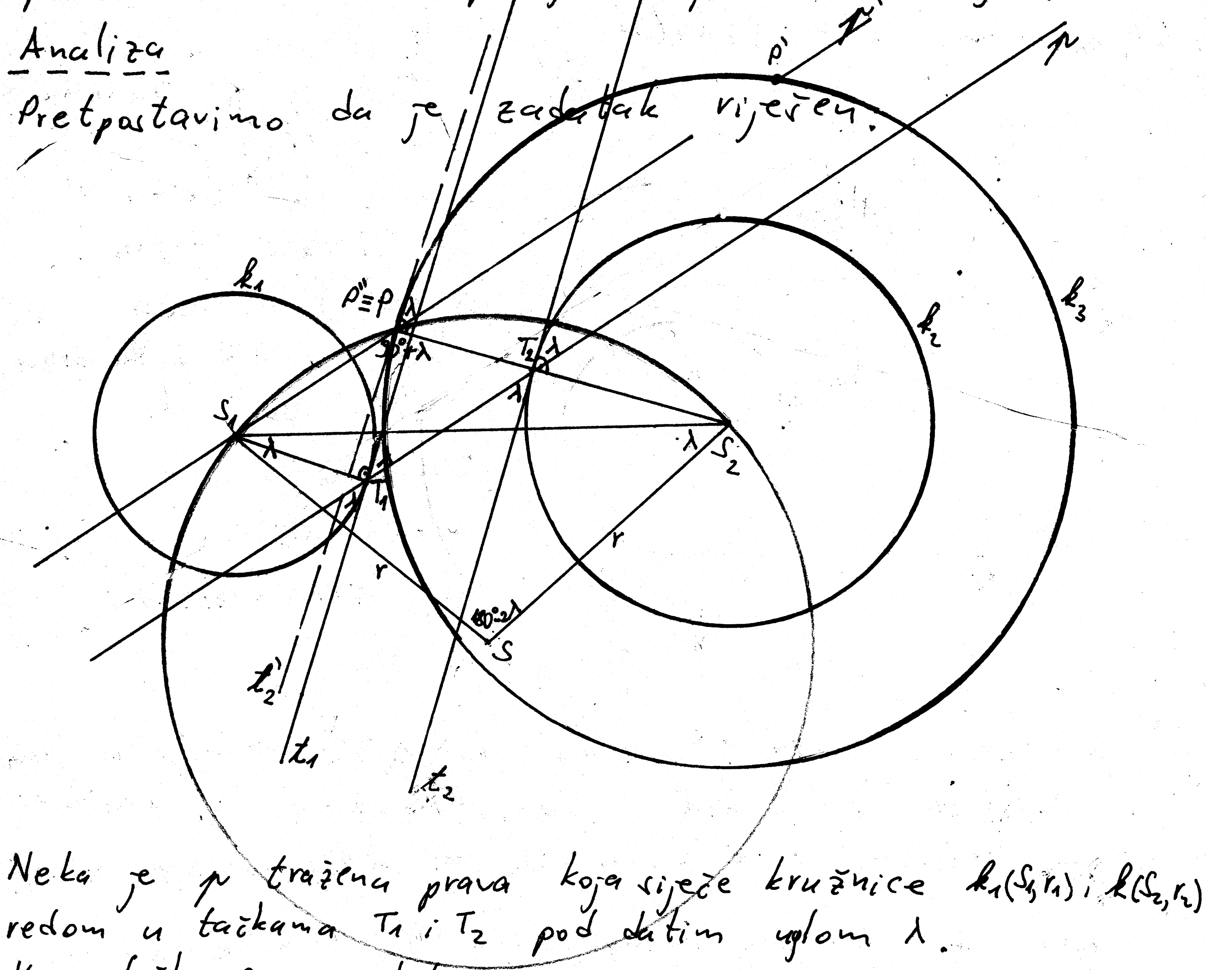
Ako je $k_1(S_1, r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\measuredangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle PSS_1 \cong \measuredangle S_1PS = 90^\circ - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

Konstruisati pravu koja siječe dvije date kružnice pod datim uglom. (Ugao između prave i kruga je ugao kojeg zaklapa data prava sa tangentom koja je povučena u tački presjeka prave i kruga.)

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja siječe kružnice $k_1(S_1,r_1)$ i $k(S_2,r_2)$ redom u tačkama T_1 i T_2 pod datim uglom λ.

Kroz tačku S_1 paralelno pravoj p povucimo pravu p'.

Označimo sa k_3 kružnicu $k(S_2, r_1+r_2)$.

Neka je $\{P, P'\} = p' \cap k_3$: $S_1 - P - P'$.

Neka $p(S_2,T_2) \cap k_3 = \{P''\}$. Dokažimo da je $P'' \equiv P$.

$P''T_2 \perp t_2$, $P''T_2 = r_1$, $S_1T_1 \perp t_1$, $S_1T_1 = r_1$ $\Rightarrow$ $\square S_1T_1T_2P''$ paralelogram

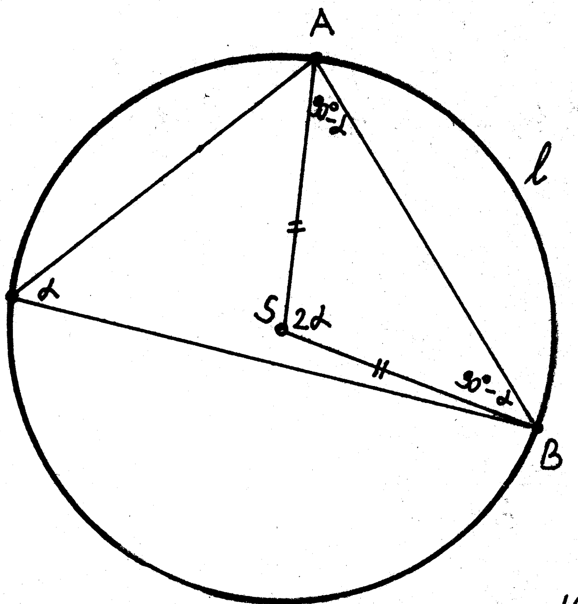
$\Rightarrow P'' \in p'$ $\Rightarrow$ $P'' \equiv P$. $\qquad \measuredangle S_2PS_1 \cong \measuredangle S_2T_2T_1 = 90° + \lambda$

Kako su nam poznati centri S_1 i S_2, kružnice k_1 i k_3 (i k_2) sad nije teško konstruisati tačku P a poslije toga i traženu pravu p.

(#) Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Analiza

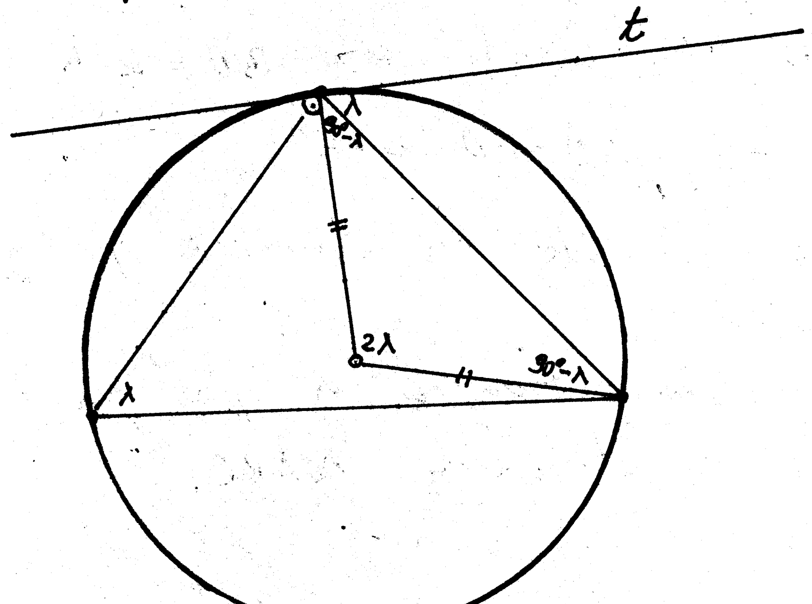
Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tačke A i B, kružnica $k(S,SA)$ koja sadrži tačke A i B takva da su periferiski uglovi nad l (l je kružni luk čije su krajnje tačke A i B) jednaki datom uglu α.
Primetimo da je $\measuredangle BSA = 2\alpha$.

Kako je ΔASB jkk sa osnovicom AB imamo da je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 90° - \alpha$.
Prema tome ΔASB možemo konstruisati pa time i kružni luk l.

Primedba:



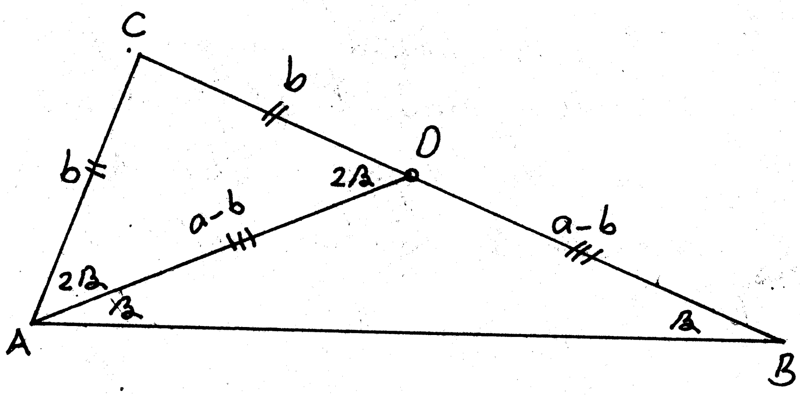
Primetite da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.
Prema tome luk kruga možemo konstruisati i na drugi način.

(#) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date stranice a i b i zna se da je $\alpha = 3\beta$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

Neka je dat $\triangle ABC$ kod koga je $\alpha = 3\beta$. ($\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$).



Kako je $\alpha > \beta$ možemo uzeti tačku D na stranici BC tako da $\measuredangle BAD = \beta$.

$\triangle ABD$ jkk

Kako je $\measuredangle ADC$ vanjski ugao $\triangle ABD$ to je $\measuredangle ACD = 2\beta$.

$\triangle ADC$ jkk $\Rightarrow$ $AC = DC = b$ $\Rightarrow$ $BD = a - b$

$\triangle ABD$ jkk $\Rightarrow$ $AD = BD = a - b$

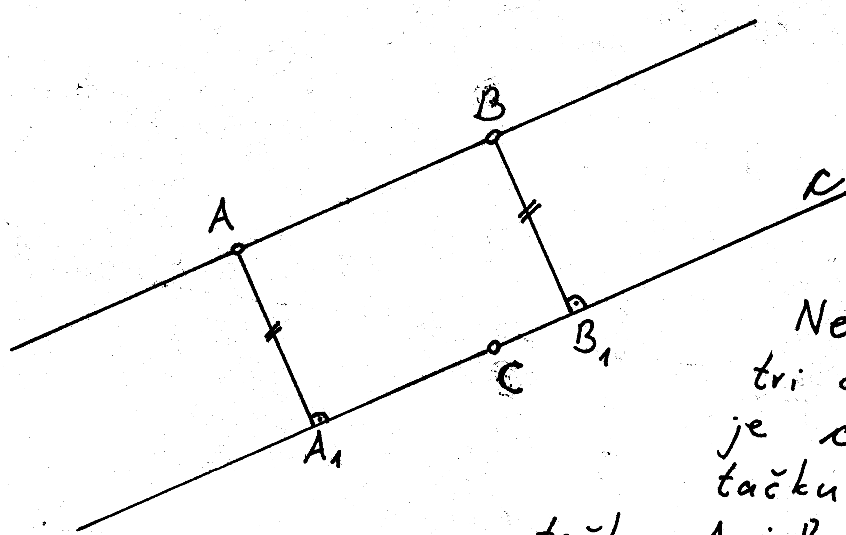
U $\triangle ADC$ su nam poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.

Kako nam je poznata stranica a poslije konstrukcije $\triangle ADC$ nije teško konstruisati $\triangle ABC$.

(#) Date su tačke A, B i C. Konstruisati kroz tačku C pravu, tako da su tačke A i B podjednako udaljene od te prave.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



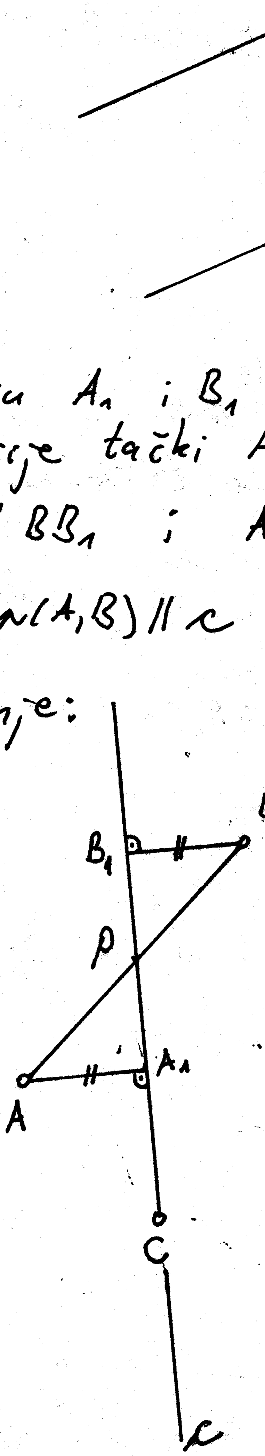
Neka su A, B i C tri date tačke i neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke A i B podjednako udaljene od nje.

Neka su A_1 i B_1 tačke koje pripadaju c, koje su ortogonalne projekcije tački A i B. Imamo

$AA_1 \parallel BB_1$ i $AA_1 \cong BB_1 \Rightarrow \square AA_1B_1B$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,B) \parallel c$ pa pravu c možemo konstruisati.

II rješenje:



Neka su A, B i C tri date tačke.
Neka je c prava koja sadrži tačku C takva da su tačke B i C podjednako udaljene od prave c.
Označimo sa A_1 i B_1 ortogonalne projekcije tački A i B.
Neka je $\{P\} = AB \cap c$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle APA_1 \cong \sphericalangle BPB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle AA_1P \cong \sphericalangle BB_1P = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P$$

$$\Downarrow$$

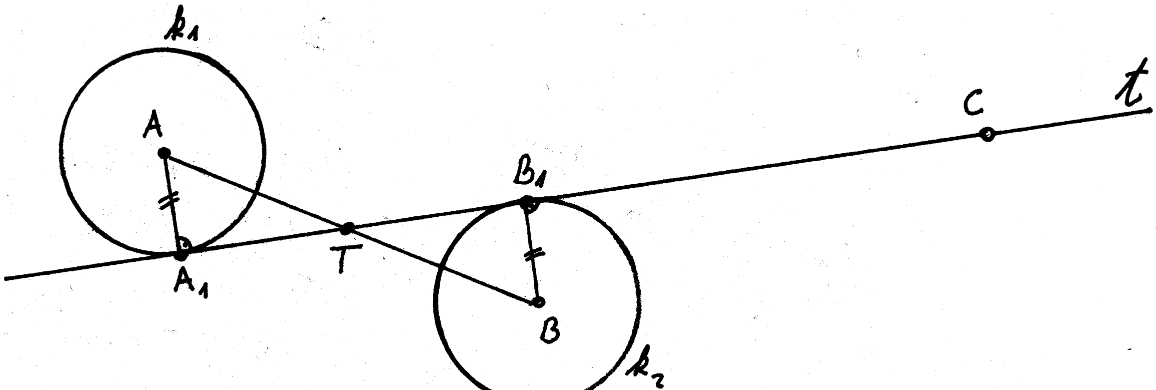
$$AP \cong BP$$

Prava c prolazi kroz sredinu duži AB pa je možemo konstruisati.

(#) Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



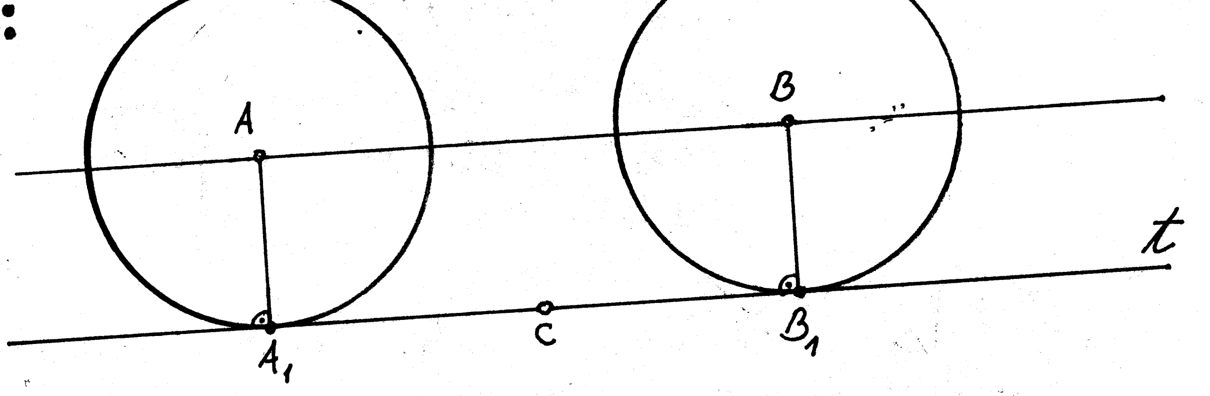
Neka su date tri nekolinearne tačke A, B i C i dvije podudarne kružnice (kružnice koje imaju podudaran poluprečnik) k_1 i k_2 koje imaju zajedničku tangentu t u tačkama A_1 i B_1 i $C \in t$. Neka je $\{T\} = AB \cap t$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ATA_1 \cong \measuredangle BTB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \measuredangle AA_1T \cong \measuredangle BB_1T = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \begin{array}{c} \Delta AA_1T \cong \Delta BB_1T \\ \Downarrow \\ AT \cong BT \end{array}$$

Kako $T \in t$ pravu t možemo konstruisati.

Kako su $AA_1 \perp t$ i $BB_1 \perp t$ kružnice k_1 i k_2 možemo konstruisati.

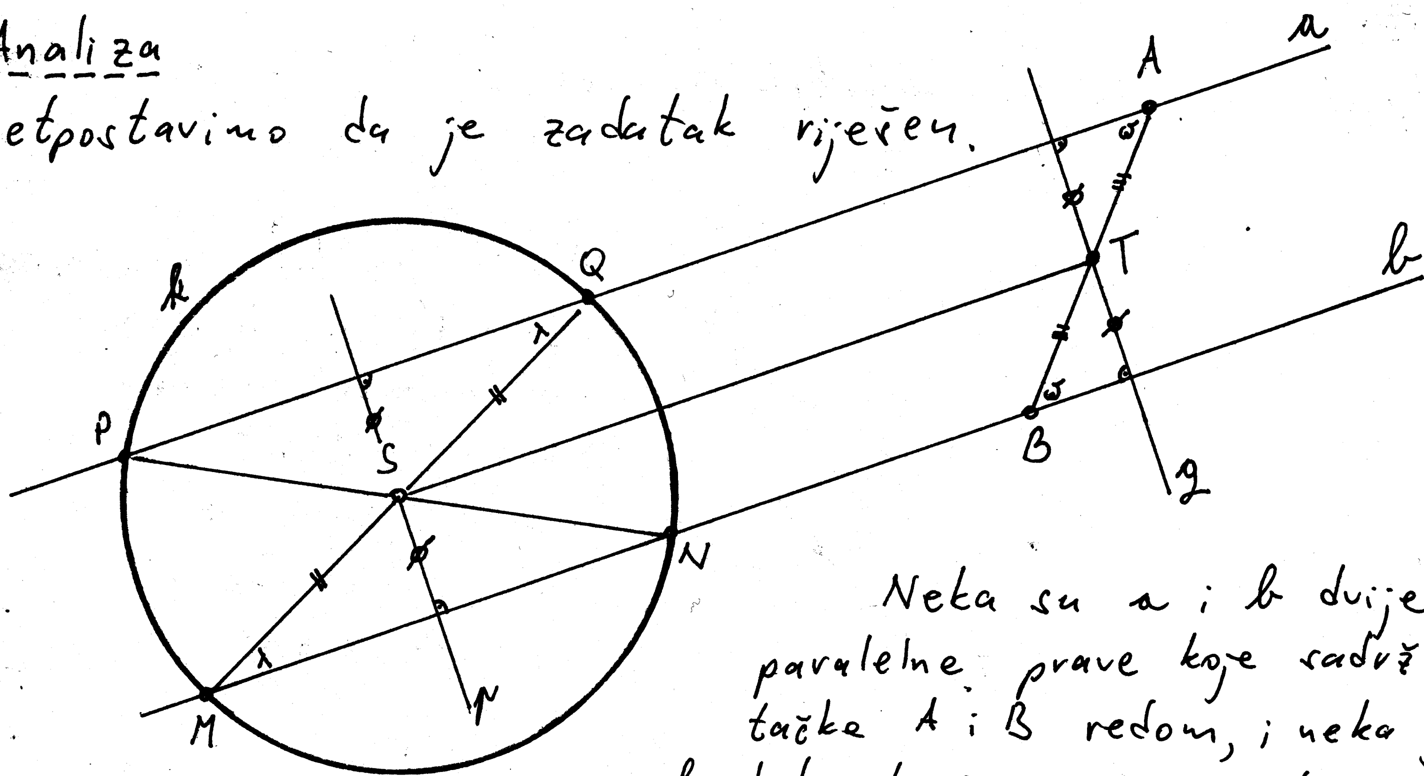
II rješenje:



(#) Date su tačke A i B i kružnica k. Konstruisati paralelne prave a i b kroz tačke A i B redom, tako da kružnica k odsjeca na njima podudarne tetive.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su a i b dvije paralelne prave koje sadrže tačke A i B redom, i neka je k data kružnica sa centrom u S koja na pravama odsjeca podudarne tetive PQ i MN.

Primjetimo da je $\square MNQP$ pravougaonik i da je $MS \cong NS \cong PS \cong QS$ (zašto?). (ugao nad prečnikom...).

Neka je tačka T sredina duži AB.

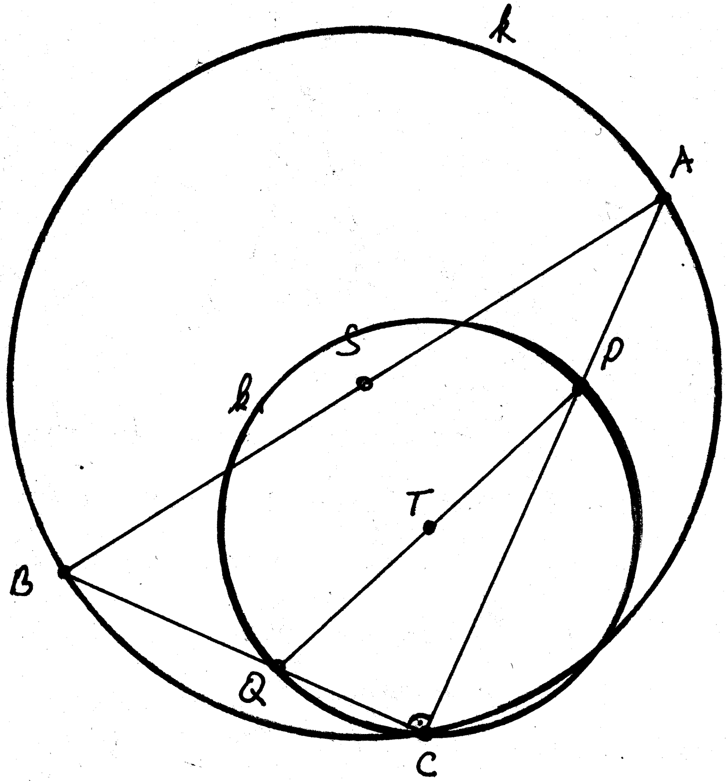
Dalje, duž TS je srednja linija $\square MBAQ$ ili četverougla $\square PNBA$ pa je $p(S,T) \parallel p(P,Q) \parallel p(M,N)$. Ovo možemo i dokazati tako što ćemo kroz S provući pravu p takvu da $p \perp b$ a time $p \perp a$, i kroz tačku T provući pravu g takvu da $g \perp a$ a time $g \perp b$. Sad primjetimo...

Kako pravu $p(S,T)$ možemo konstruisati, time možemo konstruisati i tražene prave a i b.

(#) Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli ΔABC sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetimo da je $\measuredangle BCA$ ugao nad prečnikom.

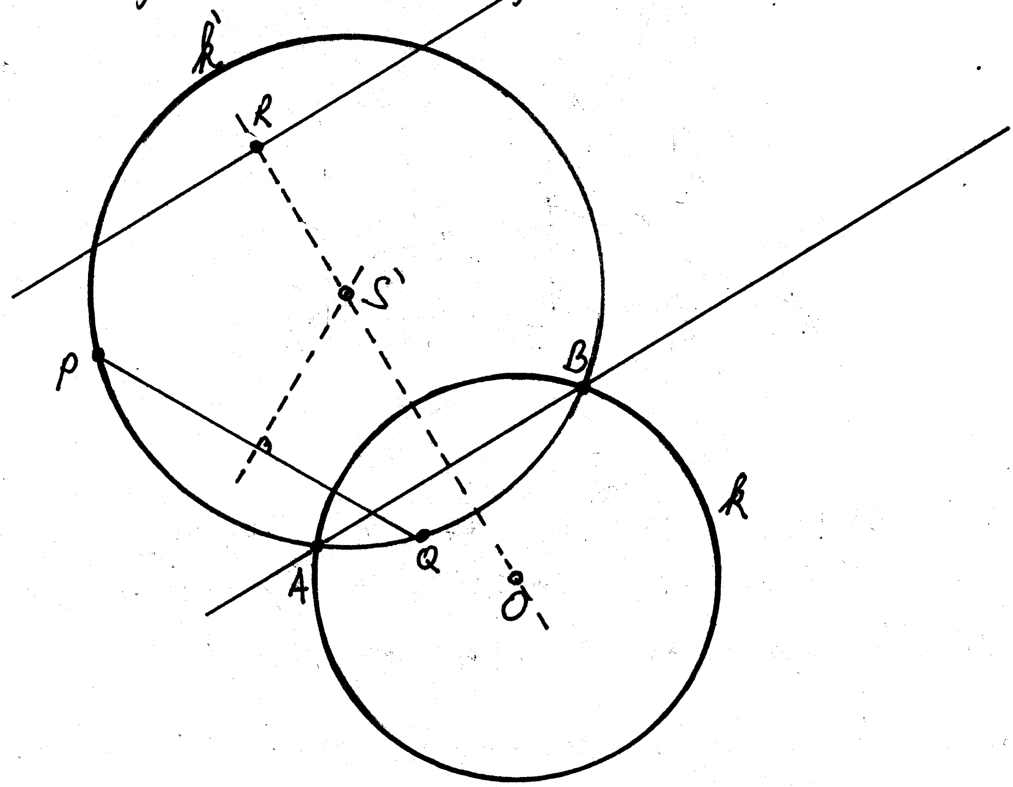
Ako oko ΔPQC opišemo kružnicu, kako je $\measuredangle QCP = 90°$ to je centar opisane kružnice k_1 oko ΔPQR u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i ΔABC.

(#) Date su tačke P i Q, kružnica k i prava l.
Konstruisati kružnicu koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu k u tačkama A i B, tako da je $p(A,B) \parallel l$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.

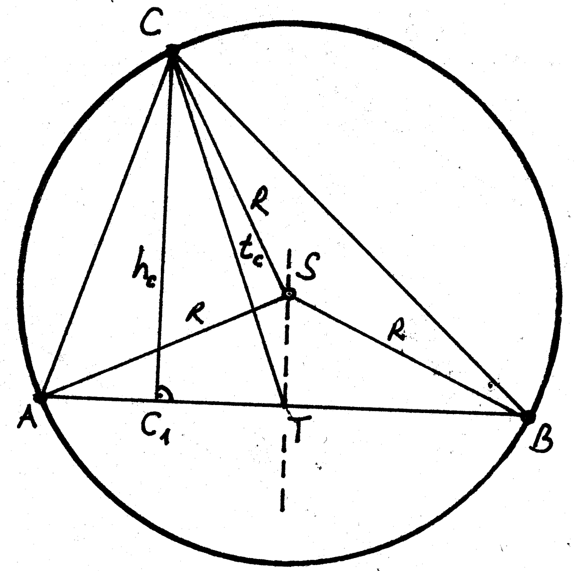


Neka je $k'(S', r')$ kružnica koja prolazi kroz tačke P i Q i koja siječe kružnicu $k(O,r)$ u tačkama A i B, tako da važi $p(A,B) \parallel l$ (gdje je l data prava).
Kako je PQ tetiva kružnice k' to centar S' leži na simetrali duži PQ.
AB je tetiva kružnica k' i k pa centri S' i O leže na simetrali tetive AB. Kako je $p(A,B) \parallel l$ i $p(O,S') \perp p(A,B)$ to je i $p(O,S') \perp l$.
Označimo sa $\{R\} = l \cap p(O,S')$.
Kako je data prava l i centar O to tačku R možemo konstruisati. Centar S' leži na presjeku simetrale duži PQ i prave $p(R,O)$ pa ga možemo konstruisati. Sad možemo konstruisati i traženu kružnicu k'.

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati visina h_c težišnica t_c i poluprečnik opisane kružnice R.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC takav da je $CC_1 = h_c$ visina spuštena na stranicu AB, $CT = t_c$ težišnica spuštena iz vrha C i R poluprečnik opisane kružnice oko Δ.

Kako su dati h_c, t_c to ΔCC_1T možemo konstruisati (imamo dvije stranice i pravi ugao).

Centar S kružnice opisane oko trougla leži na simetrali stranice AB (koju možemo konstruisati zato što imamo tačku T).

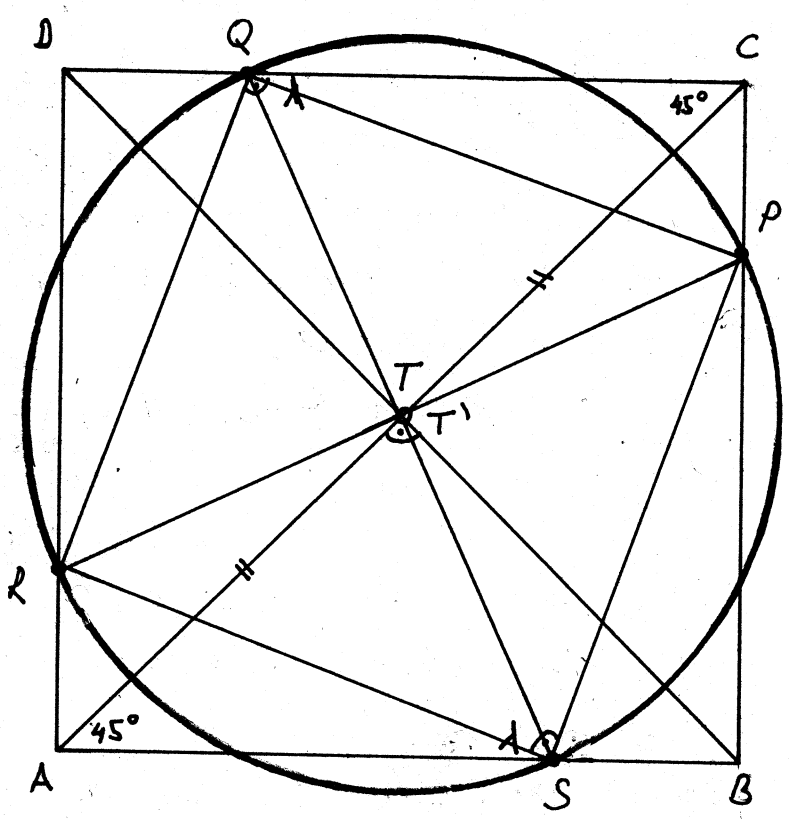
S je udaljen od tjemena C za dužinu R pa ga možemo konstruisati.

Sad bez problema možemo konstruisati tačke A i B, a time i ΔABC.

(#) U dati kvadrat upisati drugi kvadrat tako da mu dužine stranica odgovaraju veličini neke date duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je u dati kvadrat □ABCD upisan neki drugi kvadrat □PQRS.

Iz osobina kvadrata znamo da se dijagonale polove pod pravim uglom.

Označimo sa $\{T\} = AC \cap BD$ a sa $\{T'\} = PR \cap QS$.

□PQRS je tetivni četverougao pa oko njega možemo opisati kružnicu.

U dokazu ćemo pokazati da je $T \equiv T'$ centar opisane kružnice □PQRS.

Kako znamo dužinu RS nije teško dobiti poluprečnik kružnice RT a time i □PQRS.

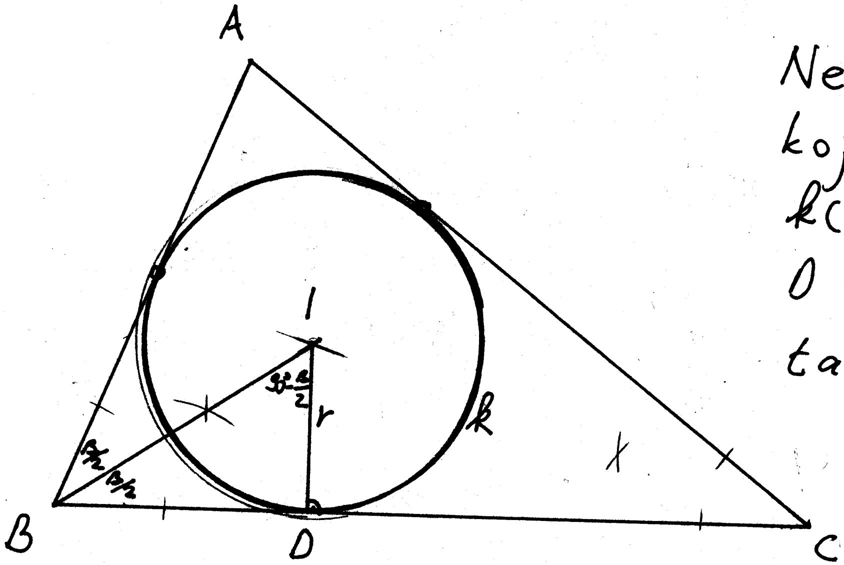
(Napomena. U dokazu treba da pokažemo i da je dobijeni četverougao kvadrat. Kako je

$\measuredangle CTB \cong \measuredangle BTA = 90°$

(#) Konstruisati trougao ΔABC ako su dati stranica a, ugao β i poluprečnik upisane kružnice r.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



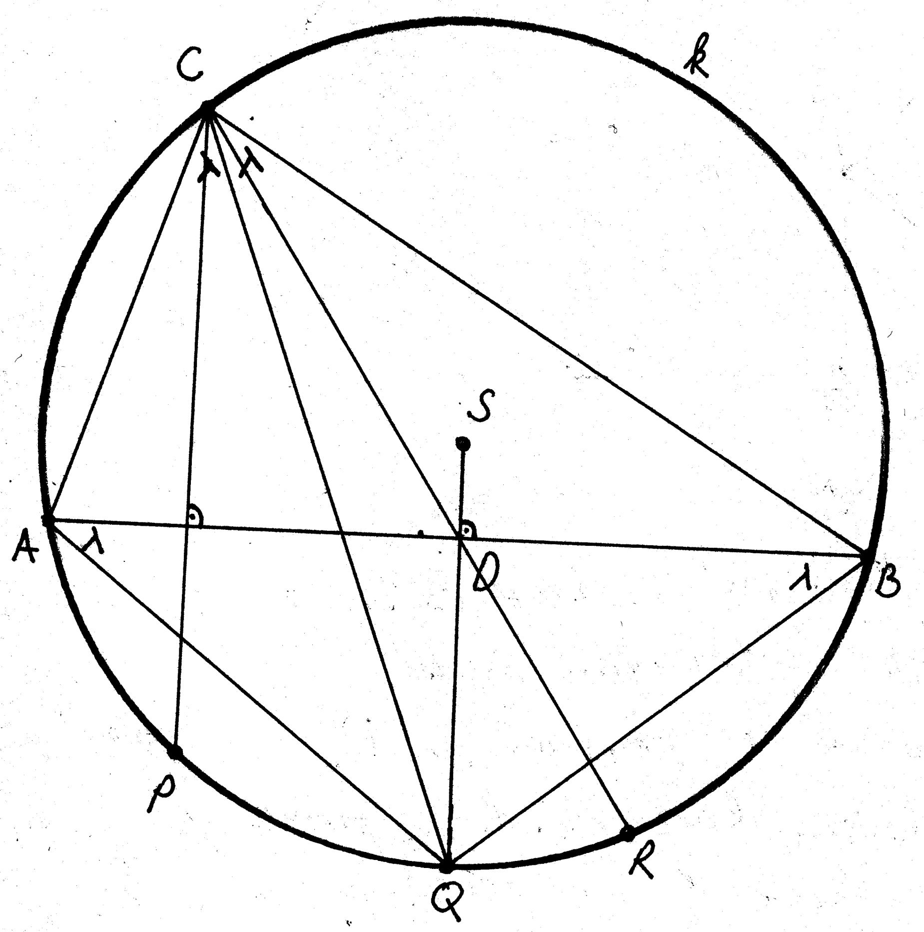
Neka je dat ΔABC u kojem je upisana kružnica $k(I, r)$. Označimo sa D ortogonalnu projekciju tačke I na stranicu $BC = a$. (prema tome $ID = r$).

U ΔBDI znamo stranicu DI i dva ugla pa ga možemo konstruisati. Kako znamo dužinu stranice a to nije problem konstruisati i tačku C.
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek tangenti iz B i C na kružnicu k, a time i ΔABC.

(#) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su date tačke P, Q i R u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz tjemena C sijeku kružnicu opisanu oko trougla $\triangle ABC$.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je k kružnica opisana oko $\triangle ABC$ i neka su P, Q i R tačke u kojima visina, simetrala ugla i težišna linija iz vrha C sijeku kružnicu.

Kako je $\square AQBC$ tetivni i $\measuredangle ACQ \cong \measuredangle BCQ$ $\Bigg\} \Rightarrow \measuredangle ABQ \cong \measuredangle QAB$
$\Downarrow$
$\triangle AQB$ jkk

pa tačka Q pripada simetrali stranice AB.

Označimo sa D $\{D\} = QS \cap AB$.

Primjetimo da je $p(Q,S) \parallel p(P,C)$. ...(*)

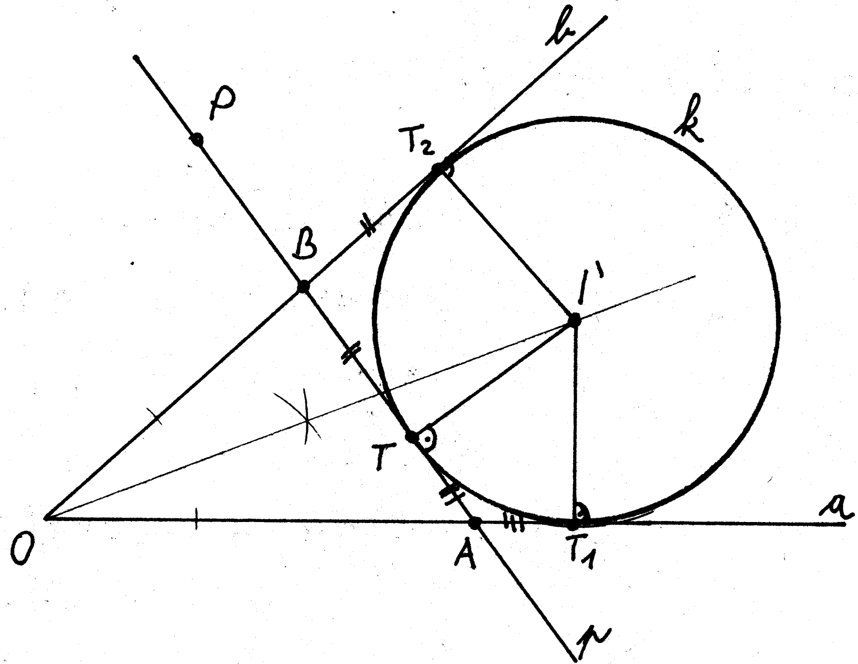
Kako kružnicu $k(S, SQ)$ mogu konstruisati to iz (*) mogu konstruisati i tačku C.

Sad bez problema mogu dobiti tačku D a time i $\triangle ABC$.

(#) Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku i od datog ugla odsjeca trougao datog obima.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p data prava koja prolazi kroz tačku P i od datog ugla $\measuredangle aOb$ odsjeca trougao ΔOAB.

stranici AB trougla ΔOAB pripišimo kružnicu k sa centrom u I'.

Označimo sa T tačku dodira kružnice k i prave p, a sa T_1 i T_2 tačke dodira kružnice k sa pravima a i b.

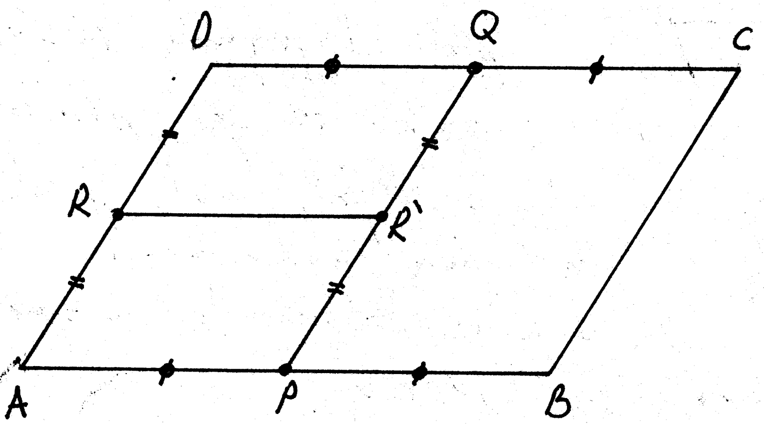
Iz osobina tangenti na kružnicu znamo da je $AT \cong AT_1$ i da je $BT \cong BT_2$ (da li bi ovo znali dokazati?)

Kako je dat. $\measuredangle aOb$ i obim trougla ΔOAB tačke T_1 i T_2 nije problem konstruisati, a time i kružnicu k. Ako iz tačke P povučemo tangentu na k dobićemo tačke A i B, a time i ΔOAB.

(#) Date su tri tačke. Konstruisati paralelogram tako da se sredine tri njegove stranice poklapaju sa datim tačkama.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat paralelogram $\square ABCD$ i neka su tačke P, Q i R redom sredine stranica AB, CD i AD.

P sredina AB, Q sredina CD, $AB \cong CD \Rightarrow AP \cong PB \cong CQ \cong DQ$.

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $PB \cong CQ \Rightarrow \square PBCQ$ paralelogram.

Slično $\square APQD$ paralelogram.

Označimo sa R' sredinu duži PQ.

$p(A,D) \parallel p(P,Q)$, $AD \cong PQ$, R sredina AD, R' sredina PQ

$\Rightarrow$ $AR \cong PR'$ i $p(A,R) \parallel p(P,R') \Rightarrow \square APR'R$ paralelogram

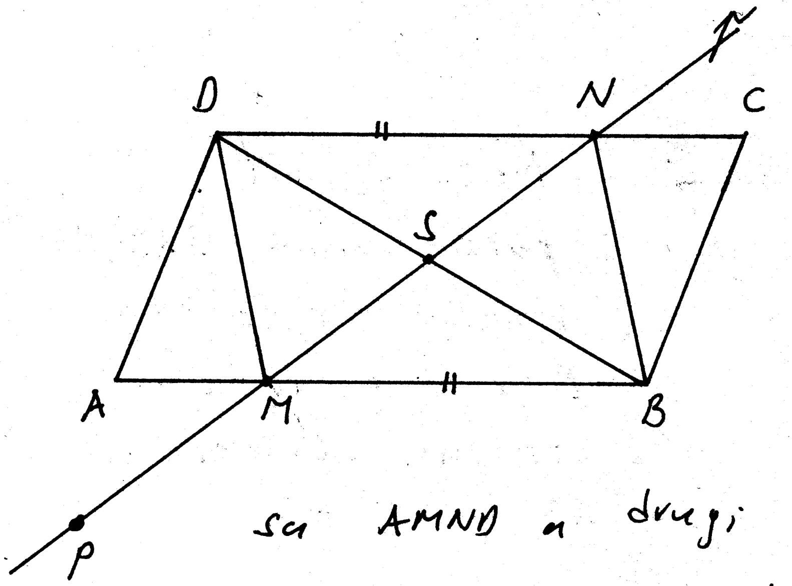
$DR \cong QR'$ i $p(D,R) \parallel p(Q,R') \Rightarrow \square DRR'Q$ paralelogram

Date su tačke P, Q i R. Sad nije problem konstruisati tačke A i D a poslije njih i tačke B i C.

(#) Kroz datu tačku u ravni datog paralelograma povući pravu koja dijeli taj paralelogram na dva podudarna dijela.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data tačka P u ravni paralelograma ▱ABCD i neka je p prava koja dijeli dati paralelogram na dva podudarna dijela (jedan dio označimo sa AMND a drugi sa MBCN).

Iz podudarnosti ova dva dijela slijedi da je $BM \cong DN$. (odgovarajuće stranice i odgovarajući uglovi su podudarni).

$MB \parallel DN \wedge MB \cong DN \Rightarrow$ ▱MBND je paralelogram u kome prava p sadrži dijagonalu MN

Dijagonale u paralelogramu se polove ⇒ prava p sadrži sredinu S dijagonale BD (S je sredina i dijagonale AC).

Prema tome tražena prava p sadrži date tačke P i S pa je možemo konstruisati.